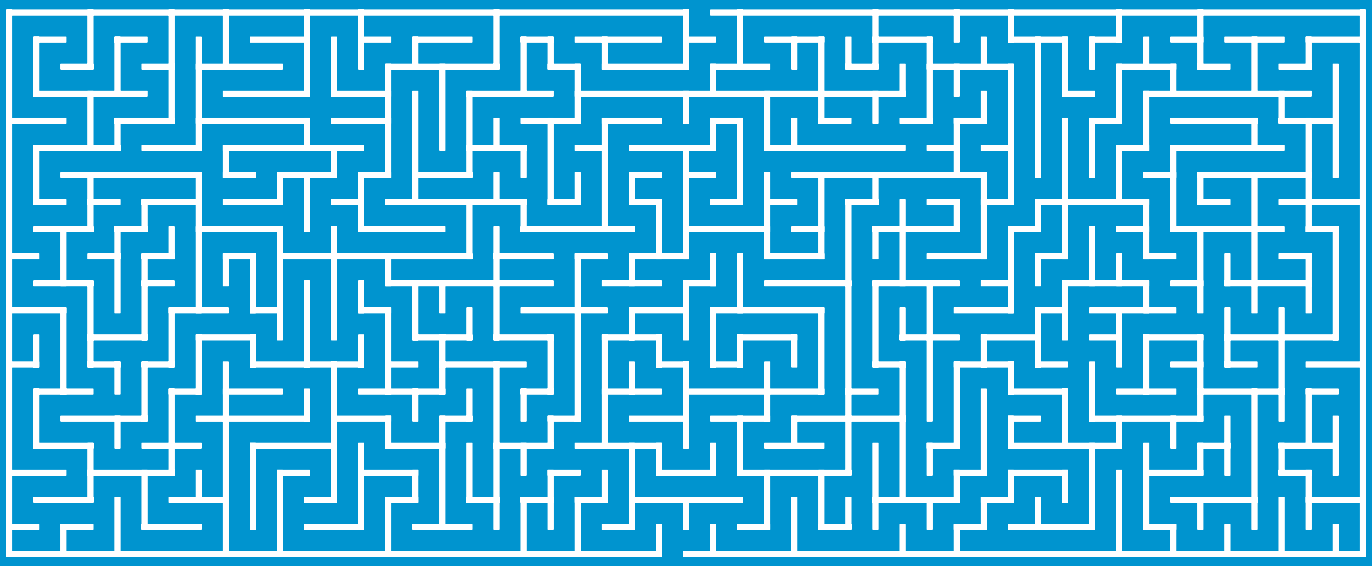
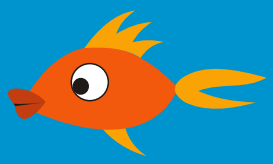
№2 Июнь 2018, Новосибирск

Лабиринт

ЛАБоратория Интенсивного Развития ИНТеллекта





От редакции

Уважаемые читатели!

В данный номер альманаха вошли материалы «Зимнего математического ринрута», который проходил с 25 по 30 декабря 2017 года в формате выездных командных соревнований для школьных команд по решению задач исследовательского типа.

В нем приняли участие 80 школьников 7-10 классов, которые были приглашены на мероприятие как по итогам предшествующего математического марафона, так и по высоким результатам лич-ного участия в интеллектуальных состязаниях математического направления. Это представители гимназии №1, гимназии №3, гимназии №5, гимназии №12, ОЦ «Горностай», гимназии №7 «Сибирской», гимназии №17 «Классической», лицея №130, СОШ №119, СОШ №162 города Новосибирска, СУНЦ НГУ, СУНЦ МГУ, Второй новосибирской гимназии, лицея №13 и школы №1 пос. Краснообска, Экономического лицея, лицея №6, лицея №7 и православной гимназии г. Бердска, биотехнологического лицея №21 пос. Кольцово.

В качестве руководителей команд выступили молодые преподаватели из числа студентов, магистрантов и недавних выпускников ММФ НГУ.

Для решения был предложен комплект задач, в основе каждой из которых лежит некоторая современная проблема, требующая проведения исследований, и созданы необходимые условия, в т.ч. ежедневный дедлайн по сдаче решений на проверку экспертам. Членами жюри и авторами задач выступили представители института математики им. Соболева, ММФ и ФФ НГУ.

Мероприятие закончилось итоговой конференцией, где были представлены доклады тех команд, которые лучше и дальше всех продвинулись в проведенном исследовании по каждой поставленной задаче.

ФОНД
ПРЕЗИДЕНТСКИХ
ГРАНТОВ

Высшая лига

Задача В1.
Стремление к гармонии

Дано несколько положительных рациональных чисел с суммой 1. Требуется разрезать квадрат 1×1 на прямоугольники с соответствующими площадями так, чтобы сумма периметров всех прямоугольников была минимальной. Какой результат можно гарантировать?

Задача В2.
Гильотинка

Найти все топологически неэквивалентные разрезания треугольника на 4 треугольника.

Задача В3.
Золотое сечение

На плоскости нарисованы 4K синих точек, 4K красных и 4K зеленых. Все точки различны, никакие три не лежат на одной прямой. Требуется двумя замкнутыми выпуклыми линиями разрезать плоскость на 4 части так, чтобы каждая часть содержала поровну точек каждого цвета. Всегда ли это возможно?

Задача В4.
Улитка

Улитка должна проползти вдоль линий клетчатой бумаги путь длины 2N, начав и кончив свой путь в данном узле. Чему равно число ее различных не самопересекающихся маршрутов?

Задача В5.
Упорядочение гирь

Имеется N неотличимых с виду гирь весом 1,2,3,... граммов и весы со стрелкой, которые показывают вес в граммах. За какое минимальное число взвешиваний можно упорядочить все гири?

Общие задачи

Задача О6.
Рыбаки

Рыбаки выловили в пруду 10 карасей и 10 щук, пометили их, и выпустили обратно в пруд. На следующий день их улов состоял опять из 10 карасей, среди которых было 3 помеченных и 10 щук, среди которых помеченных было 5 штук. Сколько и каких было рыб в этом пруду?

Задача О7.
Шулера

В колоде 6 карт – два короля, две дамы и два валета. Трем игрокам, сидящим за круглым столом, сдают случайным образом по паре карт из этой колоды. За один ход все игроки одновременно передают какую-то из своих карт соседу слева. После некоторого числа ходов игроки не сговариваясь вскрываются и у каждого из них оказываются карты одного достоинства. Предварительно игроки могут договориться о чем угодно, но во время игры обме-

ниваться информацией нельзя. Какой план должны они принять, чтобы добиться успеха за минимальное число ходов?

Задача О8.
Дележ торта

Двое по очереди ставят точки на отрезке [0,1]. После второго хода второго игрока отрезок окажется разбитым на 5 отрезков с длинами $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$ (не обязательно в таком порядке). Первый получает $a_1 + a_3 + a_5$, а второй – оставшееся. Какой стратегии следует придерживаться каждому из них, чтобы максимизировать свой результат?

Премьер-лига

Задача П9.
Шизофрения

Многоугольник называется 2-составленным, если его можно разрезать на две конгруэнтные части. Описать все выпуклые 2-составленные многоугольники.

Задача П10.
Гильотинище

Найти все топологически неэквивалентные разрезания прямоугольника на 5 прямоугольников.

Задача П11.
Фальшивые монеты

Из 2N монет половина настоящих одного веса и половина фальшивых меньшего веса. За какое минимальное число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно отделить фальшивые монеты от настоящих?

Задача П12.
Пентамощения

Найдите как можно больше различных замощений плоскости фигурой справа.

Задача П13.
Система разновесов

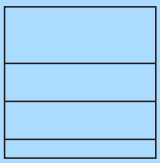
Системой разновесов называется совокупность натуральных чисел, из которой нельзя извлечь два различных набора с одинаковой суммой. Найти наименьшее натуральное число N(K) такое, чтобы из натуральных чисел, не превосходящих N(K), можно было выделить систему разновесов из K чисел.

Задача П14.
Машинка Тьюринга

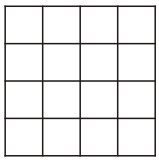
Микрокалькулятор может складывать числа и запоминать полученный результат. Первоначально в его памяти находится лишь единица. Какое минимальное число сложений потребуется, чтобы получить данное целое число N?

Участниками были предложены следующие основные типы конструкций разрезания квадрата на прямоугольники площадей $a_1 \geq \cdots \geq a_N$:

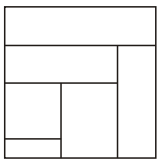
1. **Полоски** (команды №7, №8, №9 и №11): квадрат разрезается на N полосок размера $1 \times a_i$. Сумма периметров всех прямоугольников равна 2N+2.



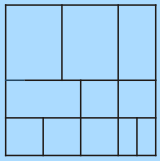
2. **Квадратики** (команды №7 и №11): если $N = k^2$ и все a_i равны $1/k^2$, то единичный квадрат можно разбить на k^2 квадратиков. Сумма периметров квадратиков равна $4\sqrt{N}$. Также несложно доказать, что для произвольного набора $a_1, \ldots, a_N$ сумма периметров не меньше $4\sum_{i=1}^{N}\sqrt{a_i}$.



3. **Косичка** (различные модификации предложены командами №7, №8 и №9): в порядке невозрастания площадей чередуются горизонтальные полоски максимально возможной ширины и вертикальные полоски максимально возможной высоты. Некоторая верхняя оценка на сумму периметров для такой конструкции была получена только командой №9.



4. **Кирпичики** (команда №10): Пусть $A = [\sqrt{N}]$. Тогда поделим квадрат на столбики с длиной 1 и шириной равной: у первого сумме первым А числам, у второго – вторым А числам и т.д, у (А – 1)-ого – (А – 1)-ым А числам и у А-ого – сумме всех остальных. Каждый столбец поделим горизонтальными полосками длины равной ширине этого столбца так, чтобы площадь отрезаемых прямоугольников равной нужным прямоугольникам. Тогда сумма периметров равна $(A-1) + (A-1) + (N - A^2)L$, где L – это ширина последнего столбца. Очевидно, что L – максимальна, когда все площади равны и $L = N - A^2/N$. Получаем $2[\sqrt{N}] + (N - [\sqrt{N}])^2/N - 2$. Итого $4[\sqrt{N}] - 8 + 2\,(N - [\sqrt{N}])^2/N$



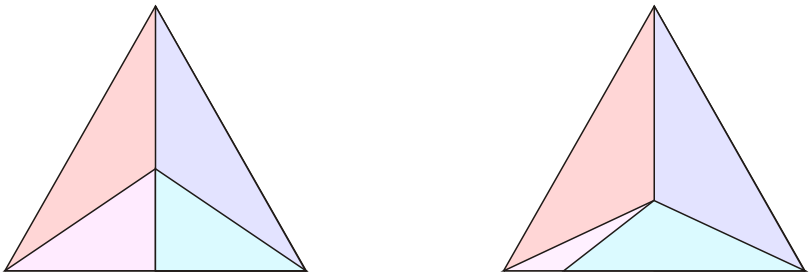
Наконец, разные варианты разбиения квадрата на 2, 3 или 4 прямоугольника были рассмотрены командами №7 и №8.

В этой задаче главным было понять, что оптимальным разрезанием являлось бы (в случае существования такового) разрезание на квадраты. Известно (например, у Гарднера), что разрезания квадрата на различные квадраты существуют и их достаточно много. Стартуя с любого из них, можно получить и разрезания на бесконечное число различных квадратов. Ни у одной команды данное соображение не встречалось. Также никто не попытался рассмотреть конкретный пример представления единицы в виде суммы достаточно большого числа слагаемых (например, $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$), хотя Памятка Юного Исследователя напрямую рекомендует подобные действия. Задача остается для домашнего анализа.

Помимо поставленного вопроса, в данной задаче в первую очередь необходимо было понять, что представляют собой топологически эквивалентные разрезания. Все команды трактовали топологическую эквивалентность сходным образом, но попытки как-то формализовать это понятие были только у команд №7 и №8.

Команда №8: Топологически эквивалентными разрезаниями будем считать те, в которых из одного разрезания можно получить другое путем передвижения точек пересечения отрезков, но не изменяя количество точек пересечения (точки можно двигать только по отрезкам, на которых они лежат; точки, находящиеся внутри треугольника должны оставаться внутри него), или поворота и отражения всей конструкции целиком.

Вопрос, считать ли следующие два треугольника топологически эквивалентными, вызвал дискуссию как среди участников, так и внутри жюри, в которой все стороны остались при своих мнениях. Один из членов жюри уверен, что фигуры различны, поскольку не могут быть переведены друг в друга гомеоморфизмом, сохраняющим ВСЕ прямолинейные отрезки.



Для различия неэквивалентных разрезаний несколько команд пошли по пути введения инвариантов. Например, следующий набор инвариантов предложен командой №9.

Команда №9: Введём инвариант из совокупности 3 инвариантов:

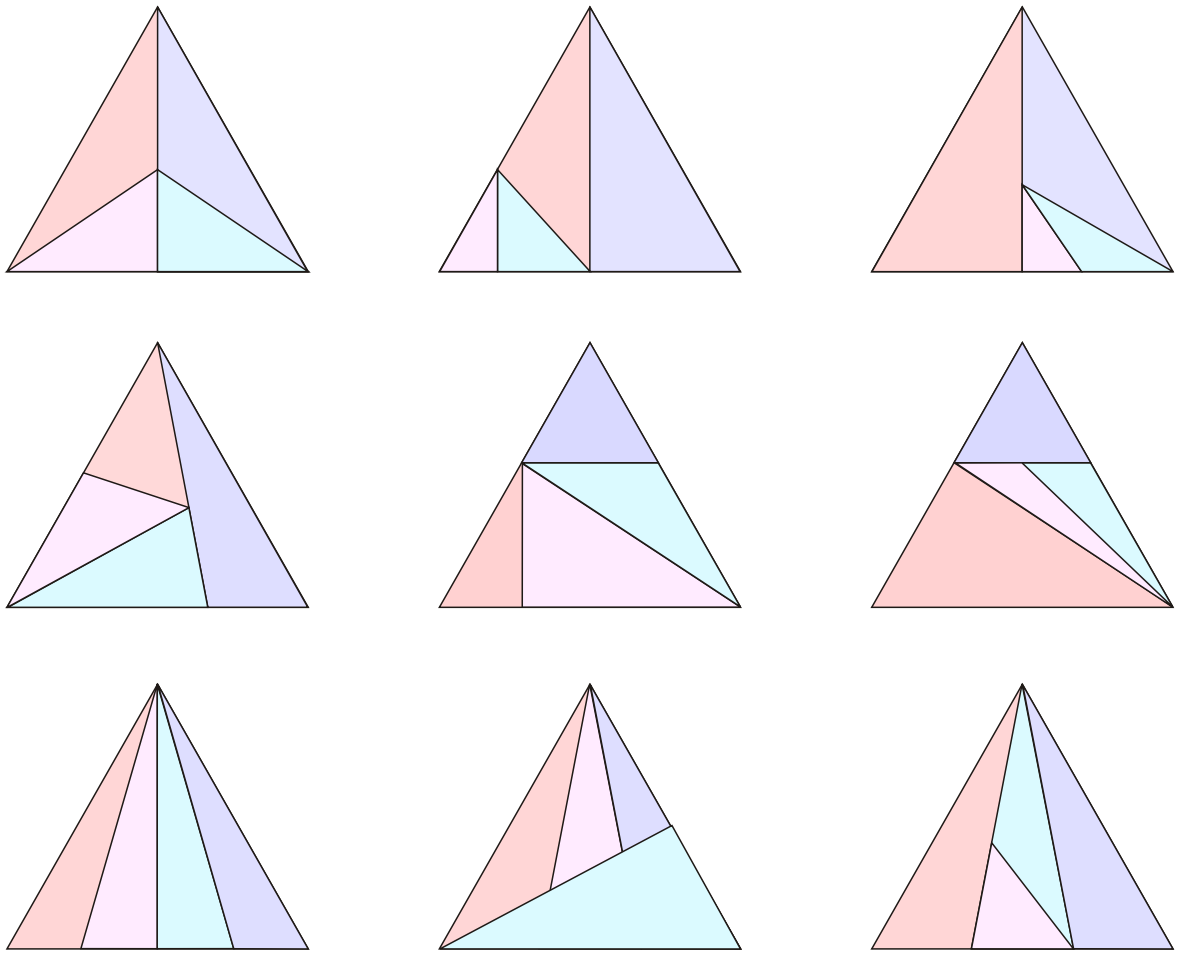
- Количество точек, образованных отрезками, не являющимися сторонами треугольника, для каждой стороны.
- Количество отрезков, не являющихся сторонами треугольника, с концами на сторонах треугольника, для каждой его стороны.
- Количество треугольников, прилегающих к каждой стороне.

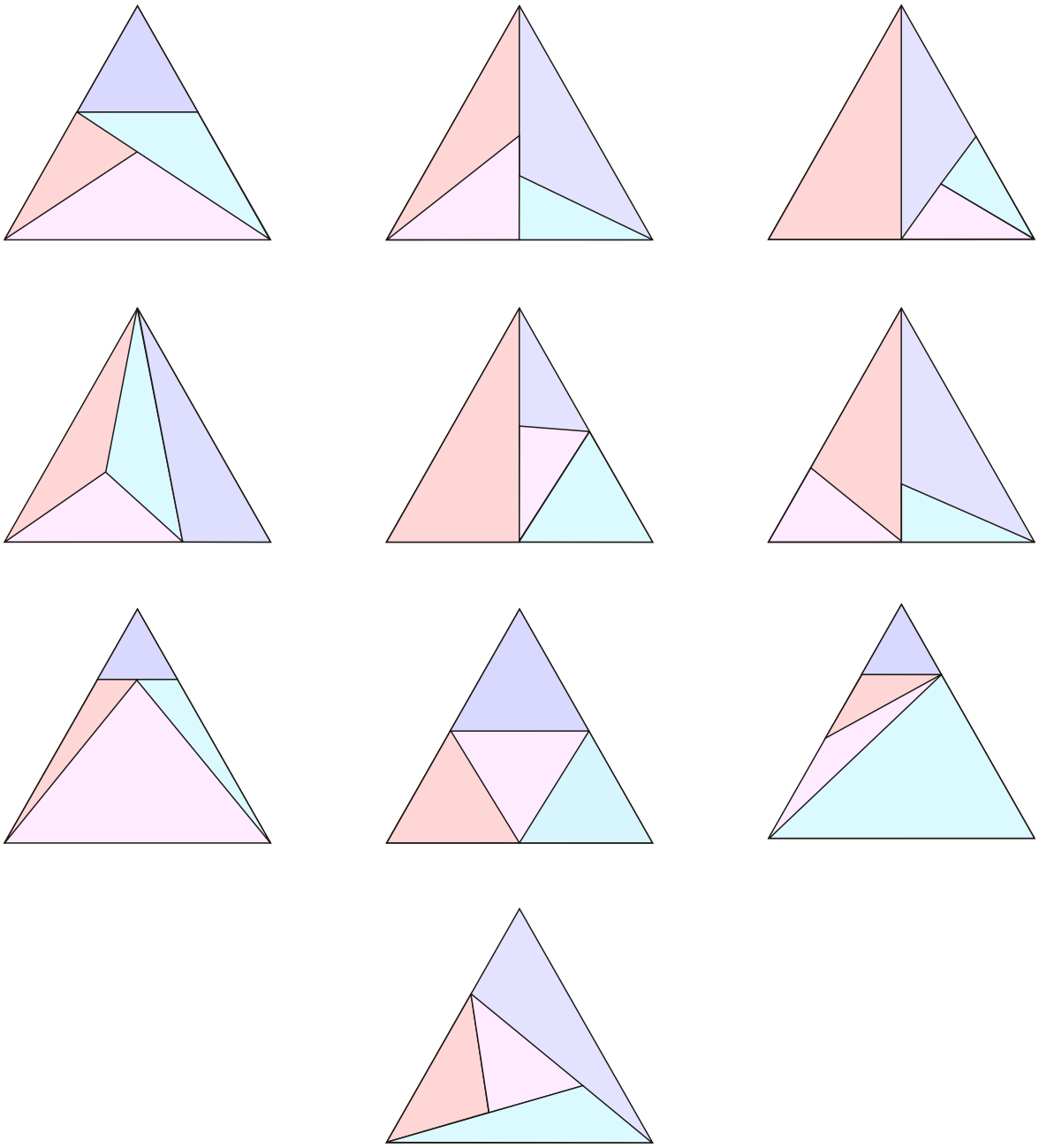
Команда №11 анализировала такие инварианты разрезания как число новых вершин на сторонах исходного треугольника, число новых вершин внутри треугольника и число линий разреза, исходящих из каждой вершины.

Ключом к эффективному перечислению фигур жюри считает понятие гильотинного разрезания, то есть такого разрезания, в котором найдется разрез от вершины исходного треугольника к противоположной стороне. Это понятие позволяет вести перебор, последовательно увеличивая число частей, на которые разрезается треугольник.

Большинство команд, а именно команды №7, №9 и №10, рассмотрели задачи разрезания на 2 и 3 треугольника, но только команда №10 привела стратегию построения разрезания на 4 части, опирающуюся на гильотинность и перечисление разрезаний на меньшее число частей. Команда №7 пошла по пути построения различных фигур из двух и трех треугольников и дополнения их до треугольника из четырех треугольников.

Две команды (команды №7 и №10) справились с перечислением всех разрезаний. В итоге получено, что существует ровно одно разрезание на две части, ровно четыре разрезания на три части (включая одно негильотинное) и 23, включая четыре негильотинных, разрезания на четыре части (или 22 разрезания, если приведенные выше два разрезания считать эквивалентными).





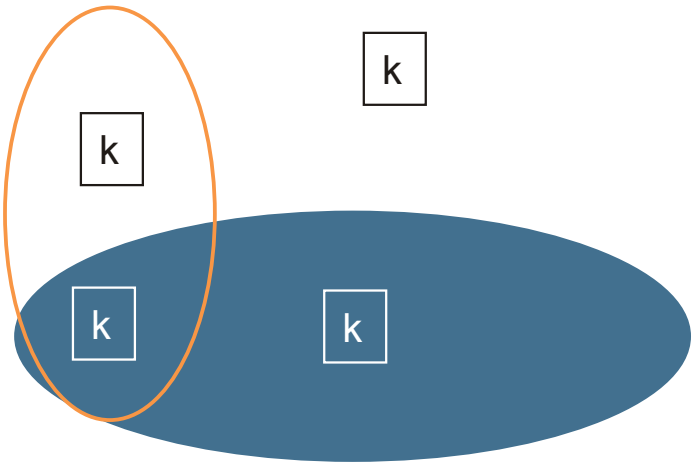
Расширения задачи, представляющие собой разрезания треугольника на большое число треугольников и некоторые нижние оценки на число таких разрезаний, были рассмотрены командами №9 и №10.

Все команды Высшей лиги справились с поставленной задачей, причем все предложенные решения оказались сходны.

Команда №8:

Во-первых, заметим, что пространство между двумя точками можно бесконечно уменьшать и в итоге заменить на ребро. Теперь опишем способ построения.

Вначале мы строим граф так, чтобы цвета шли в порядке 1-2-3 и граф содержал ровно 2K точек каждого цвета, а потом к концу данного графа присоединяем ещё граф из K точек. В итоге у нас получится такая картинка:



Получаем, что у нас образовалось ровно 4 множества по K точек в каждом. Так сделать можно всегда, так как мы можем как угодно изгибать рёбра и, следовательно, можем соединить любые 2 точки, не пересекая другие рёбра.

Участниками команды №8 было также замечено, что данное решение можно обобщить на большее число цветов и областей, а также для окружностей на торе.

Команда №9 нашла следующие способы преобразовать исходную задачу.

Команда №9:

1. Задача: Есть 2K красных и 2K синих точек, причем никакие 3 из них не лежат на одной прямой. Нужно найти прямую, которая делит плоскость на две части, содержащие по K точек каждого цвета (точка на прямой не считается). Такую прямую можно построить непрерывными движениями и поворотами некоторой прямой.

2. Игра: На плоскости есть по n точек двух цветов (никакие 3 не лежат на одной прямой), два игрока по очереди проводят прямые так, чтобы после проведения прямой во всех частях либо не было точек, либо были обоих цветов (при этом каждая проведенная линия должна разделить хотя бы одну пару точек, ранее лежащих в одной части). Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Заметим, что при n=1 побеждает второй, при n=2 и n=3 победит первый, а при n=4 в зависимости от расположения точек побеждает первый или второй игрок.

Практически все команды высшей лиги отметили, что число маршрутов улитки связано с числом полимино.

Команда №7: Ответом в нашей задаче является количество полиминошек периметра 2N (со всеми поворотами и отражениями, которые переводят их в неэквивалентные) умноженное на 2N (так как мы можем начинать свой обход с любой точки на фигуре).

С помощью компьютерного перебора были вычислены первые значения функции F(N).

Команда №11:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F(N)	0	4	12	56	280	1488	8232	47008	274824	1636520	9890584	60510480

N	13	14	15	16
F(N)	374019776	2332131872	14651535840	92653845120

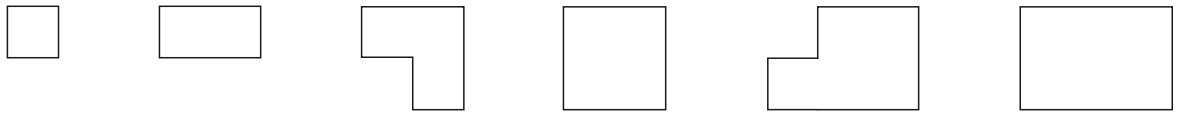
Другие команды добились несколько меньших успехов в заполнении этой таблицы: команда №7 нашла число маршрутов улитки длины 2N при N ≤14, а команда №8 вычислила F(N) для всех N ≤8.

Некоторые команды попытались как можно точнее оценить число F(N) снизу и сверху. Так команда №8 посчитала число путей улитки в виде прямоугольника и уголка, а команда №9 развила эту идею и рассмотрела пути с большим числом изломов. Обе команды установили, что F(N) ограничено снизу некоторым полиномом, зависящим от N. Что касается верхней оценки, то число всех не самопересекающихся путей длины 2N, очевидно, не больше числа всех путей длины 2N, которое равно 4^{2N}.

Наконец, команда №10 получила несколько асимптотических верхних и нижних оценок для числа путей улитки F(N), а кроме того предложила и решила следующую задачу.

Команда №10: Можно рассмотреть задачу, когда улитке нужно обползти максимальную площадь за минимальное количество шагов (минимальный периметр).

Очевидно, что при определенной площади минимальный периметр имеют полимино-спирали, семейство полимино такого вида



Периметр полимино-спирали площади n равен $2\lceil 2\sqrt{n}\rceil$.

Очевидно, что N-1 взвешивания для упорядочения всех гирь достаточно, поскольку мы можем поочередно взвешивать по одной гири, а вес последней гири находится без дополнительных взвешиваний. Данное наблюдение было сделано всеми командами Высшей лиги.

Никаких других оценок на число взвешиваний ни одной из команд получить не удалось. Команда №11 высказала гипотезу, что менее чем за N-1 взвешивание гарантировано упорядочить гири нельзя, и предприняла несколько, к сожалению, безуспешных попыток ее доказательства.

Команды №8 и №11 отметили, что данную задачу можно рассматривать как построение системы линейных уравнений.

Команда №8: В этой задаче мы предлагаем взять -тую гирю и обозначить ее вес за x_i. Затем мы можем сделать любые комбинации, которые не повторяются и содержат как минимум N-1 разных гирь. Тогда мы можем представить все эти взвешивания в виде линейных уравнений (их N-1), а последним уравнениям будет сумма весов всех гирь. Тогда у нас есть система из N различных уравнений, следовательно, система решается точными числами от 1 до N включительно. Значит, нам хватит N-1 взвешивания для того, чтобы все их упорядочить.

Другая команда предложила разные вероятностные стратегии взвешивания гирь.

Команда №7: Для четырех гирь: взвешиваем две гири, во втором взвешивании одна из взвешенных гирь заменятся на невзвешенную, при необходимости проводится взвешивание еще одной гири. Математическое ожидание числа взвешиваний равно 25/9.

Для произвольного числа гирь: гири делятся на группы по K и N-K гирь в каждой, и одна из групп (например, первая) взвешивается. Если нам повезло и по суммарному весу гирь в группе мы можем восстановить весь набор весов гирь (например, если первая группа содержит гири веса 1,…,K), то к каждой из групп мы снова применяем эту же стратегию. Если нам не повезло, то веса гирь в каждой из групп находим поочередно взвешивая каждую гирю.

Даже если нам везет на каждом шаге, то упорядочение гирь потребует асимптотически $\frac{3}{4}N$ шагов, а серия компьютерных экспериментов для N≤16 показывает, что математическое ожидание числа необходимых взвешиваний немного меньше, чем N-1.

Идея разбивать гири на группы таким образом, чтобы по суммарному весу группы можно было восстановить набор весов входящих в нее гирь, возникла и в работах команды №9.

Вычислив, получаем, что x∈ [9,12], а значит, всего было от 19 до 22 щук.

Для карасей: $0.25 \le \frac{10}{10+x} \le 0.35$

Аналогично, x∈ [19,30] и всего было от 29 до 40 карасей.

Участники другой команды обратили внимание на то, что каждый день было поймано одинаковое число щук и карасей, и пришли к выводу, что их, скорее всего, поровну и во всем пруду.

Команда №1: Если рыбаки просто выловили 20 рыб и смотрят, что 10 из них щук и 10 карасей, то понятно, что количества щук и карасей равны. Мы помним, что 20 рыб помечено и что 8 из 20 помеченных рыб было выловлено во второй раз. Получаем пропорцию $\frac{20}{x}=\frac{8}{20}$, где x – число рыб всего. Решив ее, мы получаем, что x=50, и ответ получается 25 карасей и 25 щук.

Еще одна любопытная модель строилась на предположении, что при каждом «забрасывании удочки» рыбаки ловят наиболее вероятную рыбку.

Команда №2: Пусть рыб вытаскивают в определенном порядке. Будем считать, что если вероятность ловли помеченной рыбки меньше 50%, то она не поймается, а если не меньше 50% – то поймается. Заметим, что если вытягивается непомеченная рыбка, то вероятность поимки помеченной увеличивается, и наоборот.

Так как среди щук 5 помеченных, то они ловятся через одну, так как вероятность то увеличивается, то уменьшается. Следовательно, можно составить 10 неравенств:

$$\frac{10}{x} < \frac{1}{2};\ \frac{10}{x-1} \ge \frac{1}{2};\ \dots\ \frac{6}{x-8} < \frac{1}{2};\ \frac{6}{x-9} \ge \frac{1}{2}.$$

Решив эту систему, можно получить двойное неравенство 20<x≤21. Следовательно, ответ – 21 щука.

Рассмотрим карасей. Так как помеченных 3 штуки, то сначала ловятся непомеченные, а затем, начиная с шестой рыбки, начинается чередование между помеченными и непомеченными рыбками. Получаем 10 неравенств:

$$\frac{10}{y} < \frac{1}{2};\ \dots\ \frac{10}{y-4} < \frac{1}{2};\ \frac{10}{y-5} \ge \frac{1}{2};\ \dots\ \frac{8}{y-9} \ge \frac{1}{2}.$$

Решив эту систему, можно получить двойное неравенство 24<x≤25. Следовательно, 25 карасей в пруду.

В качестве одного из обобщений было исследовано, как быстро увеличивается число помеченных рыб в пруду, если рыбаки каждый день ловят одинаковое число рыб, помечают непомеченных и отпускают обратно.

Команда №7: Создадим физическую модель. Пусть N_0 – количество рыб в пруду, N – количество помеченных рыб. За время dT мы вылавливаем k рыб, среди которых было dN рыб не помечено.

Предположим, что рыбы распределены в пруду равномерно. Тогда

$$dN = k(1 - N/N_0)dT$$

Сделав замену $Y = (1 - N/N_0)$ и проинтегрировав, получаем

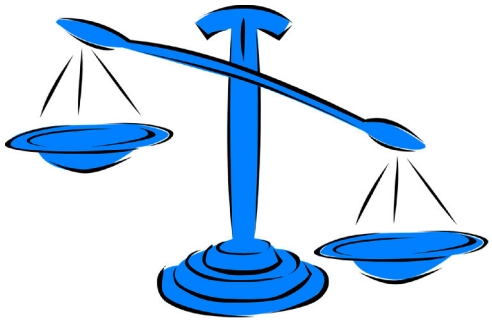
$$N = N_0 - N_0 e^{-\frac{k}{N_0 T}}$$

В отсутствии серьезных продвижений в предложенной задаче, несколько команд решили рассмотреть другие ее постановки. Например, команды №7 и №11 предложили несколько оценок на число взвешиваний для упорядочения гирь на чашечных весах, а команда №8 изобрела следующие вариации задачи:

Команда №8:

«Смишеные весы»: весы показывают вес гири либо на 1 больше, либо на 1 меньше ее настоящего веса, но никогда не показывают правильный вес. Ни за какое конечное число шагов мы не можем гарантировано упорядочить на таких весах уже 3 гири.

«Узбекские весы»: весы показывают либо правильный вес, либо на 1 меньший вес.



Самые простые наблюдения, сделанные практически всеми командами, заключались в оценке минимально возможного и наиболее вероятного числа рыб в пруду:

Команда №6: Например, если считать, что после двух забрасываний сети в пруду не осталось ни одного карася или щуки, которые ни разу не попадались в сеть рыбака, то карасей было 17, а щук было 15. Если не учитывать это дополнение, то получим оценку на количество: карасей не меньше 17, щук не меньше 15.

Если считать что в одном десятке карасей мы найдём 3 помеченных (отношение 3:10), а в одном десятке щук найдётся 5 помеченных (отношение 5:10), то у нас 33+1/3 карасей и 20 щук.

Но если смотреть на задачу не дополняя её своими условиями, то нельзя сказать, что она имеет однозначное решение, потому что в пруду могло остаться любое количество ни разу не пойманных рыб.

Одна из команд заметила, что поскольку рыбаки могут поймать только целое число рыб, то оценки наиболее вероятного числа рыб в пруду будут иметь погрешность:

Команда №8: Заметим, что при ловле рыб во второй день у нас были данные только о 10 рыбах, следовательно, погрешность вероятности может быть 0.05 (или 5%). То есть у нас получается 2 неравенства для числа x непомеченных рыб каждого вида.

Для щук: $0.45 \leq \frac{10}{10+x} \leq 0.55.$

Наконец, одной из команд все же удалось проинтерпретировать данную задачу таким образом, как это и было задумано жюри.

Команда №7: Судя по тому, что мы дважды поймали по 10 карасей и щук, вероятность поймать карася равна вероятности поймать щуку. После первого улова у нас в пруду по 10 меченых карасей и щук.

Но на следующий день мы вылавливаем не равное количество меченых карасей и щук.

Можно предположить, что у нас равное количество щук и карасей в пруду, популяция щук неизменна на нашем промежутке времени, а обновляется только популяция карасей (умирает и появляется ежедневно равное количество карасей), так как именно количество выловленных меченых карасей меньше количества выловленных меченых щук. Тогда у нас 100/5=20 щук, следовательно и 20 карасей. Если количество меченых карасей равно k, то $10\frac{k}{20}=3$, а значит, k=6. Таким образом, у нас умерло 4 меченых карася и коэффициент обновления популяции 4/10.

Но при такой постановке задачи, она тривиальна.

Довольно большое число команд (а именно, команды №2, 4, 7, 8, 9 и 11) сразу предложили стратегию, которая позволяет шулерам собрать требуемый набор карт не более чем за 4 хода.

Команда №2: В первые 2 хода игроки передают свои 2 начальные карты игроку слева. То есть можно определить карты, находящиеся у игрока слева, так как это были начальные карты данного игрока. Очевидно, игроку доступны карты в данный момент у него. Следовательно, он может узнать карты у игрока справа, зная количество всех карт.

Затем возможны три случая:

Первый случай: У всех пара одинаковых карт. Тогда все вскрываются на 2 ход.

Второй случай: У всех пара разных карт. Игроки должны передать ту карту соседу слева, которая общая у них. Тогда на 3 ход все вскрываются.

Третий случай: У одного игрока пара одинаковых карт, а у 2 остальных пара разных. Тот игрок, у которого одинаковые карты, передает одну из них соседу слева. Остальные 2 игрока должны решить, какую карту они будут передавать на первом ходу: это может быть самая сильная из двух или самая слабая. Ситуация превращается во второй случай. Все игроки вскрываются на 4 ход.

Одна из команд доказала, что никакая стратегия, в которой игроки принимают решение в зависимости от полученных ими карт, не гарантирует, что шулерам всегда потребуется не более двух ходов.

Команда №11:

За ноль и один ход вскрыться, понятно, нельзя. За два:

1. Пусть у игрока X на руках КВ (К — король, В — валет, Д — дама).

Тогда возможна ситуация, что у игрока Y (которому X отдаёт карту) тоже КВ. Если они сходят разными картами, у Y окажутся одинаковые карты, а остался один ход. Это проигрышная ситуация. Значит, они ходят одинаковыми картами (допустим королями). Отсюда, игрок с КВ за два хода до конца всегда ходит королём.

2. Пусть у игрока X на руках КД. Тогда возможна ситуация, что у игрока Z (от которого X получает карту) КВ. По пункту 1 игрок Z ходит К. Предположим, что игрок X сходит Д. Тогда у него останется КК за ход до конца. Это проигрышная ситуация. Значит, игрок X ходит К. Отсюда, и по пункту 1, игрок всегда ходит К при возможности.

3. Пусть у игрока X на руках ДВ, а у игрока Y (которому X отдаёт карту) КВ. Тогда игрок Y отдаёт К (по заключению пункта 2), и если игрок X сходит В, то у игрока Y остаётся ВВ за ход до конца. Это проигрышная ситуация. Значит, игрок с картами ДВ на руках всегда ходит Д.

4. Пусть у игрока X на руках ДВ, а у игрока Y (которому X отдаёт карту) КД. По пункту 3 игрок X отдаёт Д, игрок Y отдаёт К (по заключению пункта 2). У игрока Y остаётся ДД за ход до конца. Это проигрышная ситуация.

Предположение о гарантированным выигрыше за два хода противоречит себе и неверно.

Двум командам (командам №5 и №10) удалось все же предложить стратегию, которая бы позволяла шулерам сделать не более 3 ходов.

Команда №5: Обозначим D-дама, K-король, B-валет.

В зависимости от номера и набора карт в руке игрок выкидывает карту:

Карты в руке	Первый ход	Второй ход	Третий ход
B и K	K	K	B
D и B	D	D	D
D и K	K	K	K

Если у тебя после очередного хода на руках две одинаковые карты, то ты открываешь их.

Рассмотрены все возможные варианты начальных карт (их всего 7) и проверено, что стратегия верна.

Команда №1 предложила следующую оригинальную стратегию, которая, возможно, также позволяет завершить игру за три хода.

Команда №1: Моя схема заключается в том, что каждый игрок должен выбросить определённую карту, которую игроки заранее договорились выбрасывать.

То есть условно назовём:

Первый игрок – «Собирающий Королей».

Второй игрок – «Собирающий Дам».

Третий игрок – «Собирающий Валетов».

Все игроки должны отдать другим те карты, которые каждый должен выкинуть. Но при этом в моей схеме есть исключения, при которых меняется либо количество ходов, либо меняются выкидываемые карты игроков.

К сожалению, список исключений для этой схемы не достаточно хорошо оформлен, чтобы установить ее правильность.

Успешно справившись с решением основной задачи, команды взялись за поиск ее возможных обобщений. Одни из наиболее естественных выглядят следующим образом:

Команда №9: Построим общий случай, есть N шулеров, N достоинств карт и 2N карт. Шулера могут узнать все карты за N-2 хода. Есть гипотеза, что худший случай с полной информацией разрешим за N/2 ходов. Худший случай по предположению: (12 12 33 44 55 66 … NN).

Команда №7: Пусть каждому из n шулеров нужно собрать у себя на руках все k карт одного достоинства. Сделаем верхнюю оценку на количество из ходов шулеров.

Все карты мы узнаем за k(n –1) – 1 ходов.

Оценим, за сколько они смогут вскрыться. У нас nk карт. Каждая карта будет передаваться максимум n-1 ходов, потому что, иначе карта пройдет полный круг, и её перемещение было бесполезно. За ход у нас перемещаются n карт. Тогда оценка сверху на количество ходов = nk(n-1)/n (количество карт * количество перемещений / количество карт за ход) = k(n-1).

В итоге: верхняя оценка на количество ходов: k (n – 1) –1+ k(n – 1) = 2k (n – 1) – 1.

Разберем случай трех игроков и трех троек карт одного достоинства. Карты на руке каждого мы узнаем за 3 (3 – 1) – 1 = 5 ходов. Далее, посмотрим, как наиболее оптимально распределить карты.

Рассмотрим все возможные расположения карт, начиная с положения вскрытия, и найдем, что скрываемся мы максимум через три хода, после того как узнали все карты.

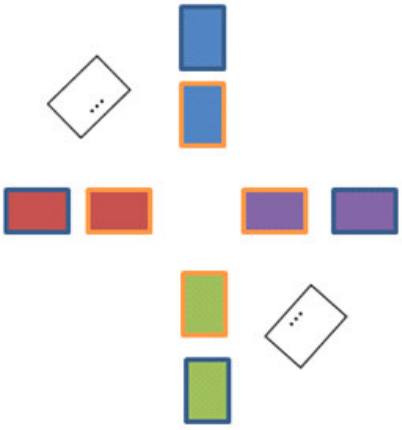
Таким образом, за восемь ходов (от начала игры) мы гарантировано вскрываемся.

На одном из брифингов возник закономерный вопрос: из любой ли раздачи карт игрокам (даже когда их очень много) можно прийти к желаемой ситуации? Для этого достаточно доказать сильную связность графа, в котором две разные раздачи соединены дугой, если из одной можно перейти в другую сделав ход. В тот же день команды №7 и №8 представили свои доказательства этого факта.

Команда №8:

Докажем, что граф типов состояний связный. Для этого опишем алгоритм для следующего преобразования: перестановка двух соседних карт без изменения положения других.

Введём следующие обозначения: внутреннее и внешнее «колесо» (карты с оранжевой и синей обводкой соответственно). Поменяем местами синюю и фиолетовую карты с внутреннего колеса местами. Для этого вначале поменяем местами фиолетовые



карты из внешнего и внутреннего колеса. Потом повернём внутреннее колесо по часовой стрелке. После этого опять поменяем местами карты, стоящие на местах фиолетовых карт и, далее, повернём внутреннее колесо против часовой стрелки (то есть сделаем N – 1 поворотов по часовой стрелке). В конце поменяем местами карты, стоящие на местах фиолетовых карт. Таким образом, мы никак не влияли на остальные карты, кроме синих и фиолетовых, и их положение никак не поменялось.

Получается, что мы можем поменять любые две соседние карты местами и перейти из любого состояния в другое. При этом данное преобразование работает для любого количества номиналов, так как мы затрагиваем только два и никак не влияем на любые другие.

Наконец, приведем несколько более оригинальных вариаций задачи о шулерах.

Команда №7: Рассмотрим постановку задачи, в которой игрокам надо собрать ситуацию, в которой у каждого игрока разные карты.

Разберем случай двух карт в руке и трех игроков. Мы действуем по алгоритму, который дает возможность взять собрать одинаковые карты максимум за три хода, только на второй ход мы вскрываемся, если у нас разные карты, и делаем дополнительный ход, если карты одинаковые.

Так как по алгоритму у нас на второй ход могут быть одинаковые карты, то на следующий ход они точно разные. Если на второй ход карты в руке у одного игрока разные, то так как на третий ход мы по алгоритму точно вскрываемся, то на второй ход карты у всех разные.

Для большего числа игроков сделаем верхнюю оценку. Пусть у нас игра с полной информацией. Тогда если мы за x ходов получаем одинаковые карты, то на x – 1 ход они все разные.

Пусть у нас k карт в руке. Если k больше числа игроков, то всегда по принципу Дирихле найдется рука с двумя одинаковыми картами: задача нерешаема.

Предположим, что в игре с полной информацией мы получаем одинаковые карты за x ходов. Тогда давайте первую карту мы оставим на месте, на один ход сдвинем вторую, на два третью и т.д. Таким образом, за (k – 1)k/2 ходов мы сдвигаем карты, и у всех получается, карты на руке будут разными.

Команда №7: Будем рассматривать игроков – золотых рыбок, предложенных на брифинге: на каждом ходу они знают только лишь номер хода + свои карты (и еще помнят стратегию). Для решения этой задачи годится та же стратегия, что в первоначальной задаче давала решение за 3 хода.

Команда №11: Пусть игроки вскрываются тогда, когда кто-то из них попросит вскрыться. Повлияет ли это на ответ? Теперь достаточно одному игроку быть уверенным в том, что вскрытие в данный момент приводит к победе. Также в этом случае интересно узнать может ли один «мудрец» выиграть с двумя «безумцами», которые не хотят договариваться.

Поскольку поставленная задача оказалась довольно сложной, некоторые команды (команды №2, 7 и 9) рассмотрели более простой вариант, в котором каждый из игроков делает лишь один ход.

Команда №7: Рассмотрим случай с двумя точками и тремя отрезками соответственно.

После хода первого, для максимизирования своего результата, второй игрок должен разбивать больший отрезок на отрезок равный меньшему и какой-то другой отрезок.

Пусть больший образованный отрезок после первого хода равен a. Тогда меньший образованный отрезок равен 1 – a. Тогда после хода второго, когда он откладывает на большем отрезке меньший, выигрыш первого игрока составляет 2a – 1.

С другой стороны, если второй игрок делит отрезок в другом соотношении, то максимальный выигрыш первого составляет 1 – a. Выигрыш второго минимален, когда 2a – 1 = 1 – a. Следовательно, a = 2/3

Участники команды №5 попытались подобраться к задаче с помощью компьютерных экспериментов.

Команда №5: Для начала я попытался воссоздать тактику второго игрока. Из условия сразу же понятно, что выиграть ему не суждено, поэтому будем максимизировать его результат. Была выбрана тактика деления пополам. После каждого хода первого игрока выбирался отрезок с большей длиной и делился надвое.

Для проверки я составил алгоритм и запустил его на примерах ходов первого игрока от 0 до 1 с точностью до: а) тысячных и б) десятитысячных. Средняя сумма 2-го игрока составила: а) 0.399819 и б) 0.399843, что достаточно близко к 0.4. Можно предположить, что при еще большей точности такое значение будет достигнуто. В 75% случаев второй игрок получает сумму не менее 0.4.

Но при такой тактике второго игрока первый игрок может делить не больший, а меньший отрезок пополам и тоже получать достаточно большое значение. Наибольший результат второго игрока приходится на приравнивание двух пар наибольших отрезков

$$(a_1 = a_2 \text{ и } a_3 = a_4).$$

Несколько команд (команда №8 и команда №11) в попытке решить задачу привели довольно обширные рассуждения, но наиболее правдоподобное решение предложено командой №10.

Команда №10:

Факт №1. Если в какой-то момент есть два отрезка одинаковой длины, то каждый из игроков получает, по одному из них.

Факт №2. Если среди последних трех отрезков есть два одинаковых, то второй игрок получит один из них, а первый – оставшиеся.

Факт №3. Если среди последних четырех отрезков есть два одинаковых, то второй игрок получит один из одинаковых и

больший из оставшихся, а первый – меньший и одинаковый.

Факт №4. Если каждый игрок делает N ходов, то в конце отрезок будет разбит на 2N + 1 отрезков. Возьмем начальный отрезок длины не 1, а 2N + 1.

Предположим, что в конечный момент отрезок разбит на один отрезок длины 1, и N отрезков длины 2, каждый из которых поделен РОВНО на две части:

Тогда обозначим за $a_1, a_2, \dots, a_N$ длины больших из двух отрезков. Не умаляя общности, упорядочим их по не возрастанию $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_N \geq 1$, но тогда $2 - a_1 \leq 2 - a_2 \leq \dots \leq 2 - a_N \leq 1$, то есть $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_N \geq 1 \geq 2 - a_N \geq \dots \geq 2 - a_2 \geq 2 - a_1$.

Но первый игрок получает первый и последний отрезок, третий и третий с конца, и т.д. Если N – четно, то первый получит N/2 пар отрезков из одной двойки, то есть с суммой 2, и отрезок длины 1, то есть он получит N+1, а второй игрок получит N. Если N – нечетно, то первый получит (N+1)/2 пар отрезков с суммой 2, то есть суммарно 2(N+1)/2 = N+1, а второй – N.

Факт №5. Если среди последних трех отрезков есть отрезок длины X, то первый получит хотя бы X.

Докажем, что первый игрок может гарантировать себе сумму отрезков 3 (я рассматриваю начальный отрезок длины 5, а не 1 для удобства).

Первый игрок первым ходом делит на отрезки длины 3 и 2.

1) Если второй игрок ходит в 2 (то есть в отрезок длины 2) и делит его на отрезки a и 2 – a, где a≤1, 2 – a≥1, то мы делим отрезок 3 на отрезки длины 3 – a и a.

Можно переставлять отрезки, не меняя их длины, но не изменяя ситуацию, так как важны только длины отрезков.

Имеем 3 – a>2 – a≥a.

Теперь пусть второй игрок ходит в некоторый отрезок и пусть b – длина меньшего из отсеченных им новых отрезков. Возможны варианты:

а) Второй ходит в отрезок a, тогда 3 – a>2 – a≥ a≥ a – b≥ b. Первый получает хотя бы 3 – a + a =3.

б) Второй ходит в отрезок длины 2 – a, тогда 3 – a – самый большой отрезок, и первый его берет. По факту №1 он также получает a, то есть хотя бы 3 – a + a = 3.

в) Второй ходит в 3 – a, тогда b≤3 – a – b.

i) b≤1, тогда 3 – a – b≥2 – a≥1≥a и ≥b. Первый игрок получает 3 – a – b, а по факту №2 он получит также a и b, то есть 3 – a – b + a + b = 3.

ii) b≥1, тогда 2 – a>3 – a – b≥ a и ≥b. Первый игрок получает 2 – a, а по факту №3 он получит a + b, то есть 2 – a + a + b≥3.

2) Если второй ходит в отрезок длины 3 и длина меньшего отрезка не больше 1, то мы отрезаем такой же отрезок в отрезке длины 2 и приходим к предыдущему случаю. Пусть меньший из новых отрезков длиннее 1, тогда если мы отрежем от большего отрезок длины 1, то будет такая картина:

Здесь $2>2-a\geq 1\geq a\geq 0{,}5$.

Рассмотрим, какой второй ход может сделать второй игрок.

а) Если он ходит в 2, то по факту №4 первый получит 3.

б) Если он ходит в 1, то первый игрок забирает 2, второй 2 – a. Рассмотрим, каким по счету может быть отрезок длины a:

i) a – третий, тогда четвертый отрезок не больше третьего и не больше 1, значит второй получает максимум 2, а мы получаем 3.

ii) a – четвертый, тогда второй забирает отрезок a, и у него всего 2, а у нас –3.

iii) a – пятый, тогда третий не меньше пятого и не меньше 0,5. При этом сумма длин отрезков первого игрока не меньше 2 + 0,5 + 0,5 = 3.

в) Если он не ходит ни в 1, ни в 2, то 2 – самая большая часть, и есть еще отрезок длины 1, но тогда первый получает отрезок 2.

i) Если есть отрезок больший 1, то первый получает отрезок длины не меньше 1 по факту №5.

ii) Если нет других отрезков больших 1, то отрезок длины 1— второй, и его забирает второй игрок. Но тогда все остальные отрезки не больше 1, то есть второй возьмет не больше 2, а первый – не меньше 3.

Докажем, что второй игрок может гарантировать себе 2:

Пусть первый игрок как-то походил, тогда докажем, что мы можем походить так, чтобы после нашего хода был отрезок длины 1, а меньший из оставшихся отрезков не был строго между 1 и 1,5. Если первый поставил точку на расстоянии меньше 1 от одного из концов, то второй игрок отрезает от второго конца 1 и меньший отрезок не больше 1. Если нет, то мы можем отрезать от любого из концов. Если при отрезании с одного из концов длина меньшего отрезка строго больше 1, но строго меньше 1,5, то длина второго строго между 2,5 и 3, если вместо этого другого конца, то если меньший был слева, то остаться слева он не мог, так он больше 1+ 1= 2, если он был справа, а стал слева, то его длина больше 2,5 – 1 = 1,5, если он был слева, то стать справа он не мог, так как левый увеличился, а правый уменьшился, если он был справа и остался справа, то он меньше 1,5 – 1 = 0,5.

Теперь получаем такую картину:

Или

Есть 3 варианта:

1) Первый ходит в отрезок длины 4 так, что его точки по разные стороны от середины отрезка, то мы ходим в середину отрезка длина 4. По факту №4 второй получает 2.

2) Первый ходит в отрезок длины 4 так, что a ≤ b ≤ 4 – a – b и 4 – a – b ≥ 2, то своим ходом мы делим больший отрезок пополам. Тогда $2-\frac{a+b}{2} \geq 1 \geq b \geq a$, но тогда второй получает $2-\frac{a+b}{2}+b=2+\frac{b-a}{2} \geq 2$.

3) Первый ходит в отрезок длины 1, поскольку меньший из отрезков не больше 1, не меньше 1,5.

а) если он не меньше 1,5, то на большем отрезке отрезаем 1,5 и получаем себе один из одинаковых отрезков по факту №1. Поскольку боль-ший отрезок не меньше 2, но не больше 2,5, то после отрезания 1,5 он будет не меньше 0,5, но не больше 1, обозначим его X. Но если так, то второй получит хотя бы 0,5, так как если X четвертый или пятый, то четвертый не меньше X и не меньше 0,5, если третий, то четвертый + пятый не больше 5 – 1,5 – 1,5 – 1, то есть минимум, что второй получит – это 0,5. Но тогда он суммарно получает хотя бы 2.

б) если он не больше 1, обозначим его за X, то больший отрезок делим пополам, на отрезки длины не меньше 1,5= 2–X/2. По факту №1 он получит 2 – X/2, если X – четвертый или пятый, то второй так же получит не меньше X, и суммарно будет 2 + X/2 ≥ 2, если X – третий, то четвертый + пятый $=5-2\left(2-\frac{X}{2}\right)-X=1$, то тогда второй получит минимум 0,5 и суммарно хотя бы 2, что и требовалось доказать.

Кроме того, команда №10 выдвинула гипотезу о том, сколько получит каждый из игроков при оптимальной игре с большим числом ходов, и проанализировала, каким должен быть последний ход второго игрока.

Команда №10: Есть теория, что если игра состоит из N ходов каждого игрока, то первый может гарантировать $\frac{N+1}{2N+1}$, а второй – $\frac{N}{2N+1}$.

Рассмотрим последний ход второго игрока: пусть перед его ходом мы имеем отрезки $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$. Тогда его ход делит отрезок на 2 других. Заметим, что его ход, максимизирующий его сумму, либо делит отрезок пополам, либо отрезает уже существующий отрезок, либо отрезает отрезок длины 0.

Если вспомнить Факт №1, то можно просто «выкинуть отрезки одинаковой длины», и мы переходим к более простой задаче: Есть отрезки $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$. Нужно максимизировать сумму через один начиная со второго, если можно сделать одну из трех операций:

1) ничего не делать

2) убрать какой-то отрезок

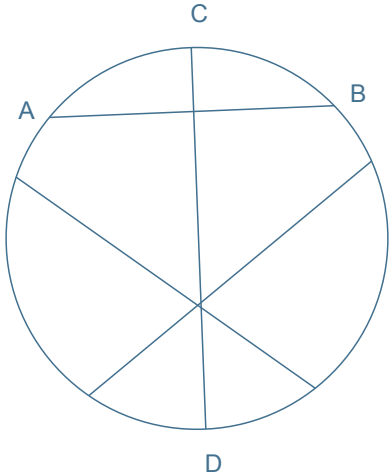
3) убрать два каких-то отрезка и записать их разность

Наконец, серия вариаций и обобщений исходной задачи была рассмотрена участниками команд №7 и №8.

Команда №7: Возьмем **круглый торт**. Делить его будем прямолинейными разрезами от края до края (хордами). Теперь нам надо максимизировать площадь для первого и второго. Очевидно, что второй больше половины торта набрать не может. Однако мы нашли стратегию, при которой он может гарантировать ровно половину при n ходах.

Стратегия: После хода первого игрока мы проводим серединный перпендикуляр к построенной им хорде.

Если n=1, то в данный момент все симметрично относительно CD и второй получает ровно половину. Затем после любого хода первого игрока мы повторяем его симметрично CD, и второй вновь получает половину торта и т.д.



Рассмотрим **случай правильного n-угольника**, его делим на части отрезками, концы которых лежат на сторонах многоугольника. Добавим одно ограничение для первого игрока: его первый ход должен быть параллельным одной из сторон правильного многоугольника. Дальнейшие ходы проходят без условий.

Докажем что второй игрок сможет гарантировать себе половину всей площади. После первого хода первого игрока, второй проводит отрезок, который делит отрезок первого игрока и перпендикулярен ему. Этот отрезок будет совпадать с одной из осей симметрии. Очевидно, что если второй игрок будет делать все свои ходы симметрично первому относительно той оси, он получи ровно столько же, сколько и первый.

Рассмотрим **случай произвольного количества отрезков**.

Если отрезков четное количество, мы разбиваем все отрезки на пары, за второго игрока действуем симметрично первому в каждой паре и получаем половину.

Если отрезков нечетное количество, мы отделяем один отрезок, с остальными отрезками рассуждения аналогичны, а действия на оставшемся отрезке сводятся к случаю одного отрезка.

Рассмотрим **случай угла и его деления на другие углы**.

Если поставить этот угол в вершину равнобедренного треугольника, с основанием 1, то при делении угла на основании будут образовываться отрезки, пропорциональные углам, а значит, задача сводится к отрезку.

Команда №8: Пусть мы будем резать **квадрат**, имеющий площадь 1. Мы режим линиями, которые параллельны сторонам квадрата, а затем распределяем части в порядке возрастания по площади. Первый игрок забирает части с самой большой площадью, третьей по величине площадью и т.д. Все остальные забирает второй игрок.

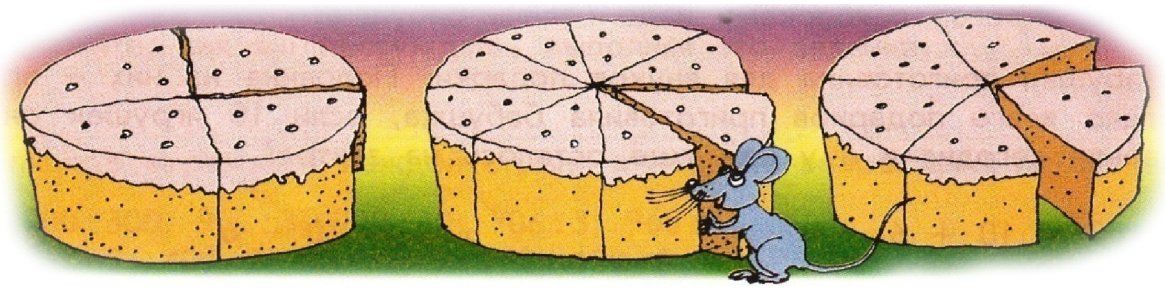
Заметим, что второй игрок может всегда получить половину квадрата.

Стратегия для второго игрока: Все ходы, кроме последнего будут симметричны предшествующему ходу первого игрока относительно центра квадрата. Последним ходом делим квадрат пополам (последняя линия должна быть перпендикулярна предшествующей линии противника). Заметим, что после последнего разрезания все фигуры равны относительно этой линии.

Теперь рассмотрим **игру в поддавки** для $n = 1$ (на отрезке).

Пусть первый игрок разделил отрезок на части длиной a и длиной 1-a (не нарушая общности, скажем, что, a меньше или равно 0,5). Тогда второй игрок поделит отрезок a на 2 равных и получит часть, равную 0,5a (иначе второй игрок получит больше, чем 0,5a, если разрежет его на 2 не равных, и тем более он получит больше, если разрежет отрезок 1 – a). Заметим, что тогда, a должно быть наибольшим, поэтому, чтобы первый минимизировал свой отрезок, ему нужно сделать a=0,5.

В итоге мы получили, что при правильной игре в поддавки первый игрок получит 0,75, а второй игрок получит 0,25.



Следуя Памятке Юного Исследователя, команда №4 систематично исследовала на 2-составленность многоугольники с малым числом вершин: они рассмотрели, какие треугольники, четырехугольники и пятиугольники могут быть 2-составленными. В ответ на это команда №2 заметила, что любой правильный многоугольник является 2-составленным.

Команда №2: Рассмотрим случай, когда наш многоугольник правильный и докажем, что его всегда можно разбить на две конгруэнтные части.

Пусть в нём четное количество вершин. Тогда соединим две противоположные вершины. Наши получившиеся части конгруэнтны (т.к. стороны наших частей соответственно равны). Также мы можем соединить 2 точки противолежащих сторон, которые одинаково удалены от вершин прилежащих к этим сторонам.

Пусть в нём нечётное количество вершин. Тогда соединим произвольную вершину с серединой противолежащей ей стороны. Стороны нашего многоугольника соответственно равны, поэтому они конгруэнтны.

Также эта команда отметила следующие свойства 2-составленных многоугольников и разрезаний на конгруэнтные части:

Команда №2:

1. Будем разрезать наш многоугольник одной прямой, так как если мы разобьём его ломаной, наши части не будут конгруэнтными (одна из его частей будет выпуклой, а другая нет).

2. Исходя из определения конгруэнтных частей, 2-составленный многоугольник будет иметь пары одинаковых сторон.

3. В 2-составленном многоугольнике конгруэнтные части соприкасаются равными сторонами, иначе образуется угол, который больше 180 градусов.

Почти все команды нашли, что если у фигуры есть осевая или центральная симметрия, то фигура будет 2-составленной. Обоснование этого факта было представлено командой №5.

Команда №5: Заметим, что все многоугольники имеющие ось или центр симметрии — 2-составленные. Докажем это.

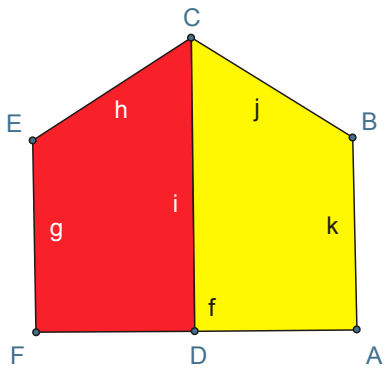
1. Пусть многоугольник имеет ось симметрии, тогда мы можем порезать многоугольник по этой оси и получить 2 фигуры, которые равны, поскольку переходят друг в друга осевой симметрией.

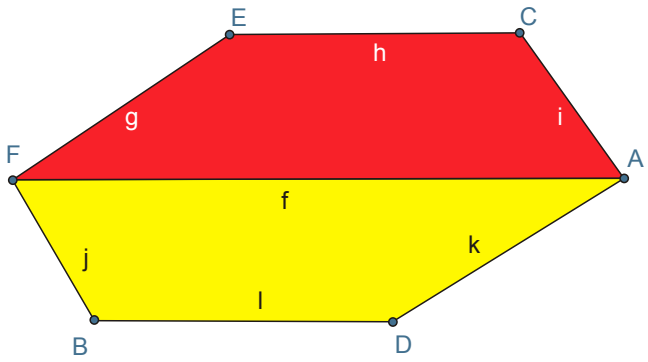
2. Пусть многоугольник имеет центр симметрии, тогда мы можем порезать его по диагонали и получить 2 части, которые равны, поскольку переходят друг в друга центральной симметрией.

С другой стороны, команда №2 привела способ, как можно строить 2-составленные многоугольники с осевой или центральной симметрией.

Команда №2:

Осевая симметрия: Чтобы получить 2-составленный многоугольник, можно конгруэнтную часть симметрично отразить относительно стороны. Но тогда 2 угла, прилежащих к этой стороне должны быть меньше 90 градусов, так как иначе образованный многоугольник будет невыпуклым.

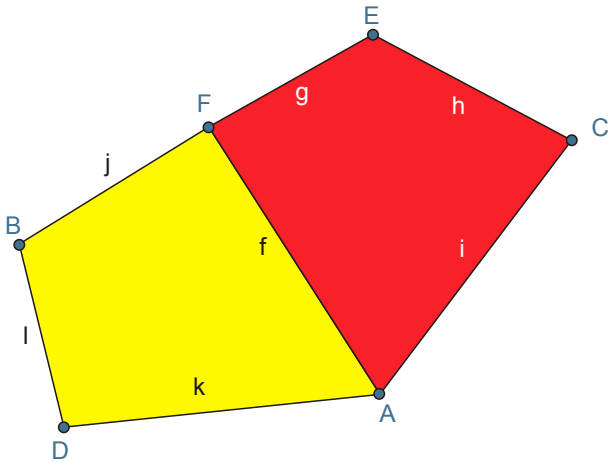




Центральная симметрия: Также можно получить 2-составленный многоугольник, отразив его относительно середины стороны. Но тогда сумма углов, прилежащих к этой стороне должна быть меньше 180 градусов, иначе образованный многоугольник будет невыпуклым.

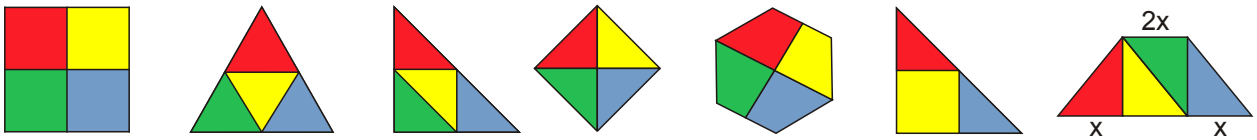
Команды №5 и №6 выдвинули гипотезу, что любая 2-составленная фигура обязана иметь осевую или центральную симметрию. Но к концу Ринрута один из участников команды №2 нашел 2-составленный многоугольник, не имеющий ни центральной, ни осевой симметрии.

Команда №2: 2-составленный многоугольник можно получить вращением конгруэнтной части, у которой есть равные стороны, так, чтобы одна перешла в другую. 2-составленный многоугольник также должен удовлетворять условиям выпуклости.



Единственное обобщение этой задачи рассмотрела команда №5: она изучала многоугольники, составленные не из двух, а из большего числа конгруэнтных частей.

Команда №5: Фигуры, такие как квадрат, параллелограмм, равнобедренный треугольник, шестиугольник и равнобедренная трапеция являются 4-составленными.



Гипотеза 1: Любой правильный -угольник можно разделить на k частей, где k – любой делитель N.

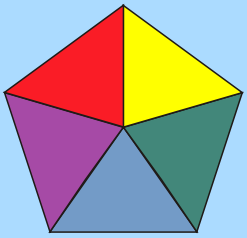
Утверждение 1: Любой параллелограмм является -составленным, то есть его можно разрезать на N одинаковых частей. (параллельно одной из сторон).

Пример деления на 4 части:

Утверждение 2: Правильный N-угольник является -составленным.

Доказательство: Проводим N разрезов от вершины к центру многоугольника, у нас N равных частей.

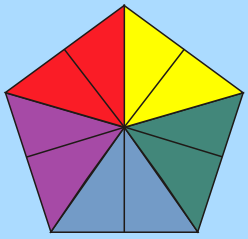
Пример с пятиугольником:



Утверждение 3: Правильный N-угольник является также 2N-составленным.

Доказательство: Исходя из предыдущего утверждения, мы можем получить, что N-угольник делится на N равных частей, эти части являются равнобедренными треугольниками. Равнобедренный треугольник можно поделить на две равные части, следовательно правильный N-угольник можно разделить на 2N равных частей.

Пример с пятиугольником:



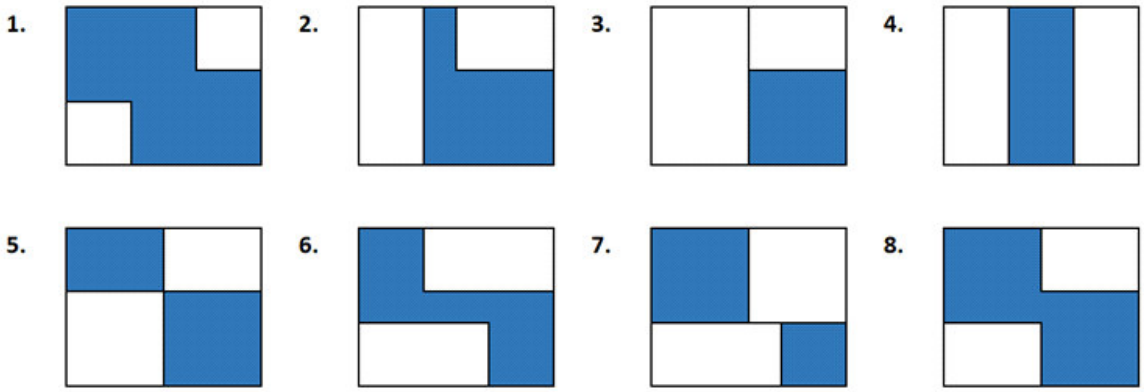
Команды Премьер-лиги уделили меньше внимания формальному определению топологических неэквивалентных разрезаний, но одна попытка дать его все же была предпринята.

Команда №2: Пусть два разрезания являются топологически эквивалентными, если одно можно перевести в другое деформацией (сжатие, растягивание), поворотами и отражениями. При этом взаимное расположение смежных вершин должно оставаться низменным.

Понятие гильотинного разреза использовалось в рассуждениях команд №1 и №5. Перечисления разрезаний на 5 частей с помощью разрезаний прямоугольника на меньше число прямоугольников, а также разрезания на большее число частей, возникали в работах команд №5 и №6.

Несколько команд предложили и более оригинальные способы построения и систематизации топологически неэквивалентных разрезаний.

Команда №2: В искомом разбиении найдётся прямоугольник, который имеет общий угол с разбиваемым прямоугольником. При этом этот прямоугольник не может иметь противолежащий угол разбиваемого прямоугольника, а значит, этот угол имеет другой прямоугольник из нашего разбиения. По нашему определению топологической эквивалентности, мы получаем 8 возможных неэквивалентных расположений этих двух прямоугольников (см. на рисунке снизу, где белые области – возможные расположения наших прямоугольников).



Далее в каждом из 8 случаев команда №2 рассматривает все возможные разбиения синей фигуры на 3 прямоугольника.

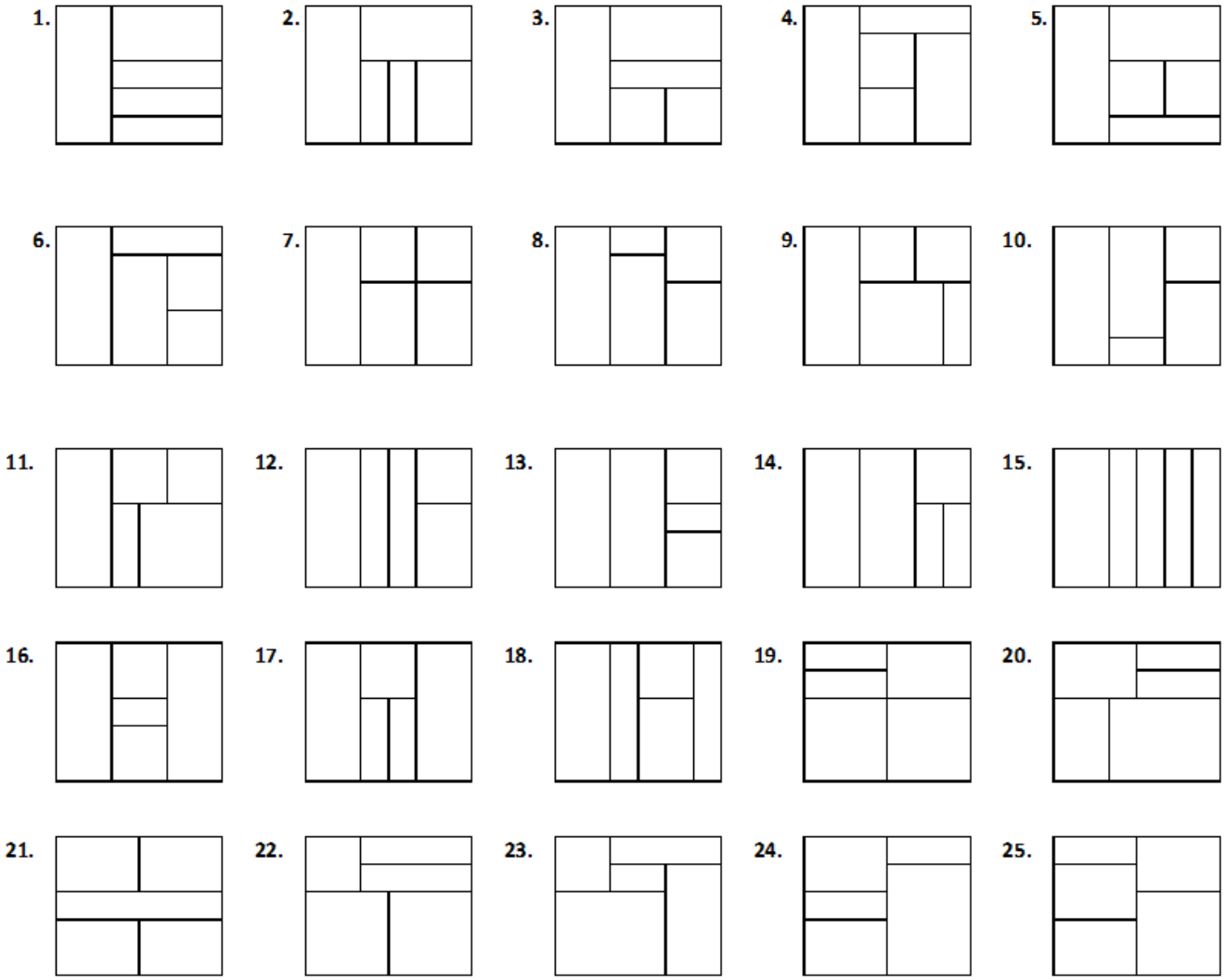
Команда №3 решила отличать неэквивалентные разбиения с помощью наборов инвариантов.

Команда №3: Ознакомившись с условием задачи, мы не придумали ничего лучше, чем решать её методом перебора, однако вскоре поняли, что данный способ нерациональный. Именно поэтому ввели некое определение для систематизации вариантов разрезания:

- центр – это точка, вокруг которой можно развернуть отрезок, при этом создав новый вариант разрезания прямоугольника, не нарушая условие задачи (при этом отрезки могут изменять свою длину).
- мнимый центр – это точка, относительно которой можно развернуть часть отрезка.

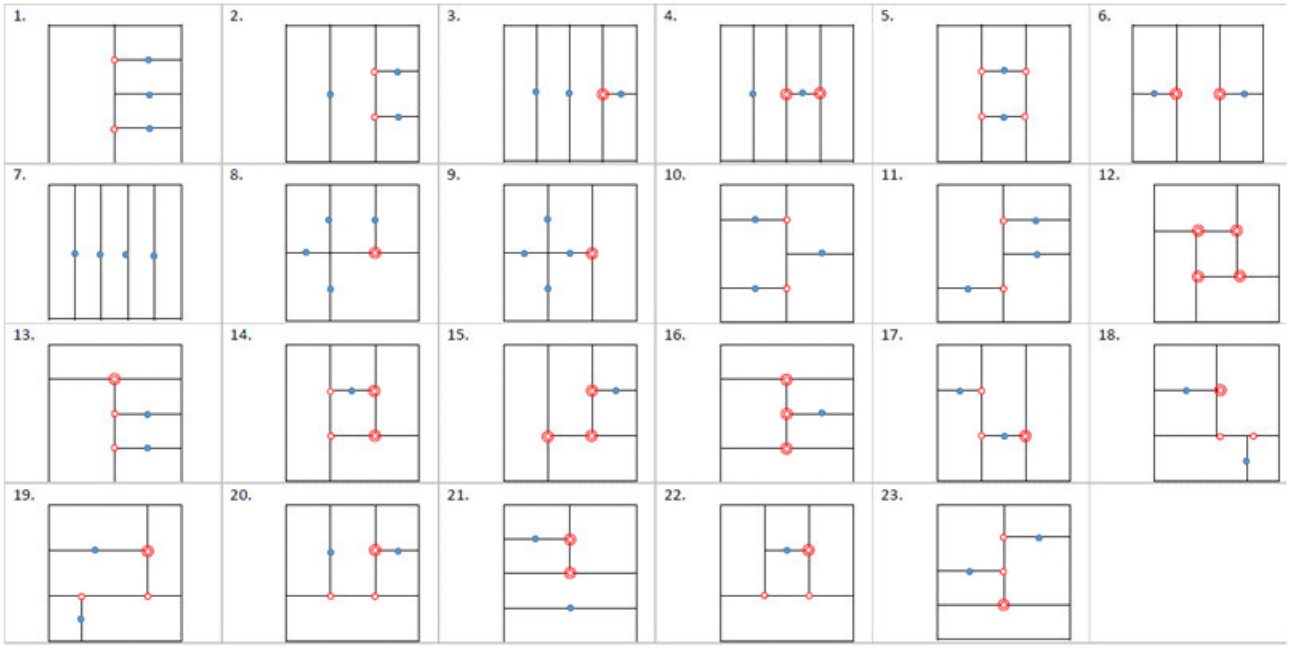
Лучшие списки топологически неэквивалентных разрезаний прямоугольника представлены следующими командами:

Команда №2:



Команда №3:

- ● - центр;
- ○ - мнимый центр для 1 части отрезка;
- ◎ - мнимый центр для 2 частей отрезка.



После, мы решили рассмотреть какие разрезания можно получить из данного при изменении одного элемента (отрезка) относительно одного из центров (далее мы называем это шагом) и вывели некую последовательность, с помощью которой из одного разрезания можно получить любое другое:

7 -> 3 -> 21 -> 4 -> 9 -> 20 -> 23 -> 16 -> 13 -> 15 -> 8 -> 2 -> 10 -> 19 -> 17 -> 18 -> 6 -> 3 -> 19 -> 12 -> 5 -> 14 -> 22 -> 1 -> 13 -> 11 -> 2 -> 8 -> 6 -> 3 -> 7.

Наконец, команда №5 обратила свое внимание и на задачу B2. Гильотинка Высшей лиги и нашла некоторые топологически неэквивалентные разрезания треугольника на 2, 3, 4 и 5 треугольников.

Пара команд начала исследование данной задачи с рассмотрения случаев с небольшим числом монет. Так команда №4 построила деревья взвешиваний, из которых сделала вывод, что для разделения 4 монет на фальшивые и настоящие достаточно 2 взвешиваний, 6 монет – 4 взвешиваний, а 8 монет – 5 взвешиваний.

Команда №5 получила тот же результат для N=2, но для решения случая N=3 она предложила провести 3 взвешивания следующих групп монет:

1) 1,2,3 и 4,5,6; 2) 1,5,6 и 4,2,3; 3) 4,2,6 и 1,5,3.

Для N=5 эта команда предлагает сделать 5 взвешиваний следующих наборов монет:

1) 1,2,3,4,5 и 6,7,8,9,10; 2) 1,7,8,9,10 и 6,2,3,4,5;

3) 2,4,5 и 7,8,9; 4) 2,8,9 и 7,4,5; 5) 7,4,9 и 2,8,5.

Другая пара команд получила сходные верхние оценки для числа необходимых взвешиваний.

Команда №1: Если N – чётное число, то мы разбиваем все монеты по кучкам из 2 монет, в каждой кучке мы взвешиваем монеты. Если у нас оказались в одной паре монеты фальшивая и настоящая, то мы берём одну из монет и сравниваем ее с монетой каждой другой пары, где обе монеты равные.

Если же у нас во всех парах монеты равны по весу, то тогда мы берём монету из одной пары и сравниваем её с монетами из других пар.

Число взвешиваний: N + N – 2.

Если N – нечётное число, то всегда имеется пара с разными весами монет. И мы берём одну из монет и сравниваем с монетой каждой другой пары, где монеты равные. Формула остается такой же.

Команда №2: Разделим 2N монет на группы по N + 1, N – 2 и 1 монет. Выложим каждую из групп в ряд. Последовательно проведём сравнения для любых двух соседних монет первой группы (потратим ровно N сравнений). Так как в этой группе N + 1 монета, среди них будут и фальшивые, и настоящие (по принципу Дирихле). Из чего делаем вывод, что среди сравнений будет не менее одного неравенства. Поэтому мы можем определить, какие из монет первой группы фальшивые, а какие настоящие. Аналогично разбиваем монеты из второй группы на фальшивые и настоящие за N-3 операций. Так как мы уже разбили 2N-1 монет, последняя монета однозначно определяется как фальшивая или настоящая. Итого мы разбили все монеты за 2N-3 сравнения.

Команда №2 изменила исходную задачу таким образом, что для решения новой задачи требуется не больше взвешиваний, чем число степеней двоек в разложении числа 2N на простые множители.

Команда №2: Пусть у нас имеются 2N монет, среди которых есть настоящие и фальшивые, причём вес фальшивых монет одинаков и отличается от веса настоящих. Нужно разбить монеты на две кучи размера N так,

чтобы одна из куч была тяжелее другой.

Разобьём все монеты на две кучи по N монет. Если N – нечётное, то в этих кучах будет разное количество настоящих/фальшивых монет. Поэтому одна из куч будет тяжелее другой. Иначе разобьём первую кучу на две подкучи по N/2 монет и повторим эту же операцию (т.е. остановимся, если N/2 – нечетное, иначе разобьём одну из куч из N/2 монет на кучи по N/4 и т.д.).

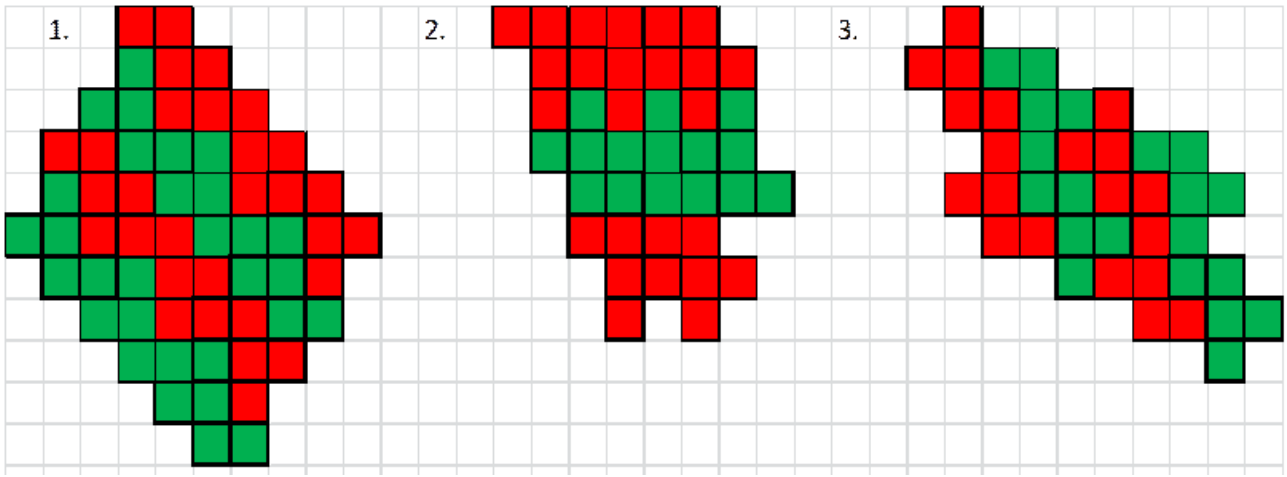
Пусть K – количество двоек в разложении N на простые множители. Тогда через K+1 сравнений мы получим две кучки монет, в каждой из которых будет по $\frac{N}{2^K}$ монет (нечётное число). Поэтому одна из кучек перевесит другую. Обозначим первую кучу за A, вторую за B.

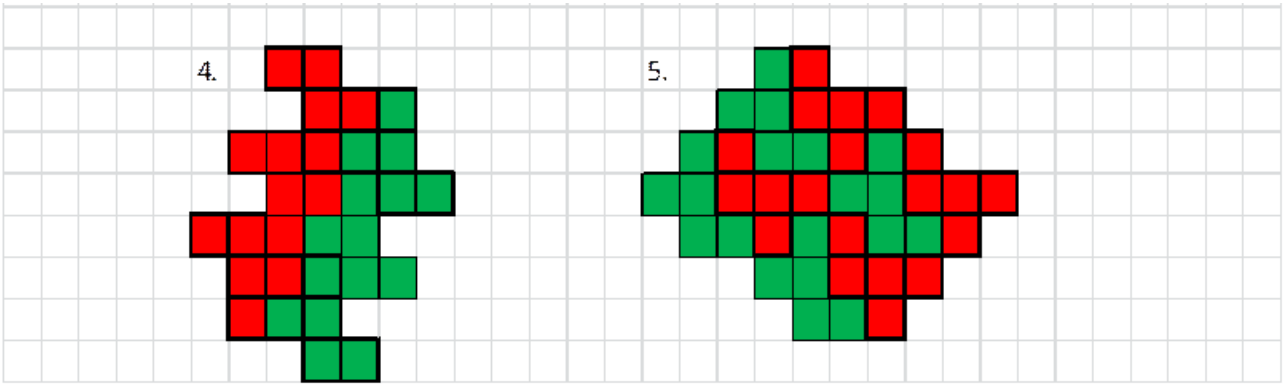
Пусть C – произвольные $\frac{N}{2^K}$ монет из кучи, отложенной на первом шаге. Сравним A и C. Если они не равны, мы меняем их местами, иначе меняем местами B и C (B отличается по весу от A, значит, оно отличается по весу и от C).

Команда №2 предложила следующую раскраску фигур, позволяющую отличать разные замощения, а также выдвинула одну интересную гипотезу. Всего этой команде удалось найти 5 неэквивалентных замощений плоскости.

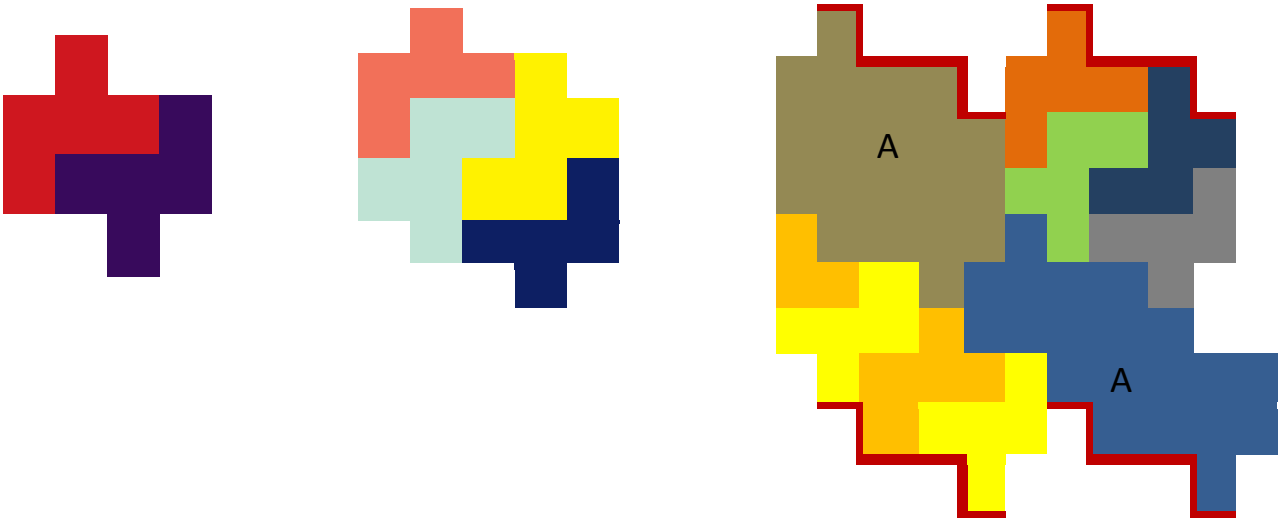
Команда №2: Покрасим фигуры, располагающиеся одинаково, в одинаковые цвета (красный и зеленый). Соединим красную фигуру с зеленой. Теперь получившиеся фигурки выкладываем на плоскость и замощаем ее.

Возникает **гипотеза**: если при попытке замостить плоскость одноцветные фигуры не соприкасаются (не имеют общего узла или стороны клетки), то замощение не получится.



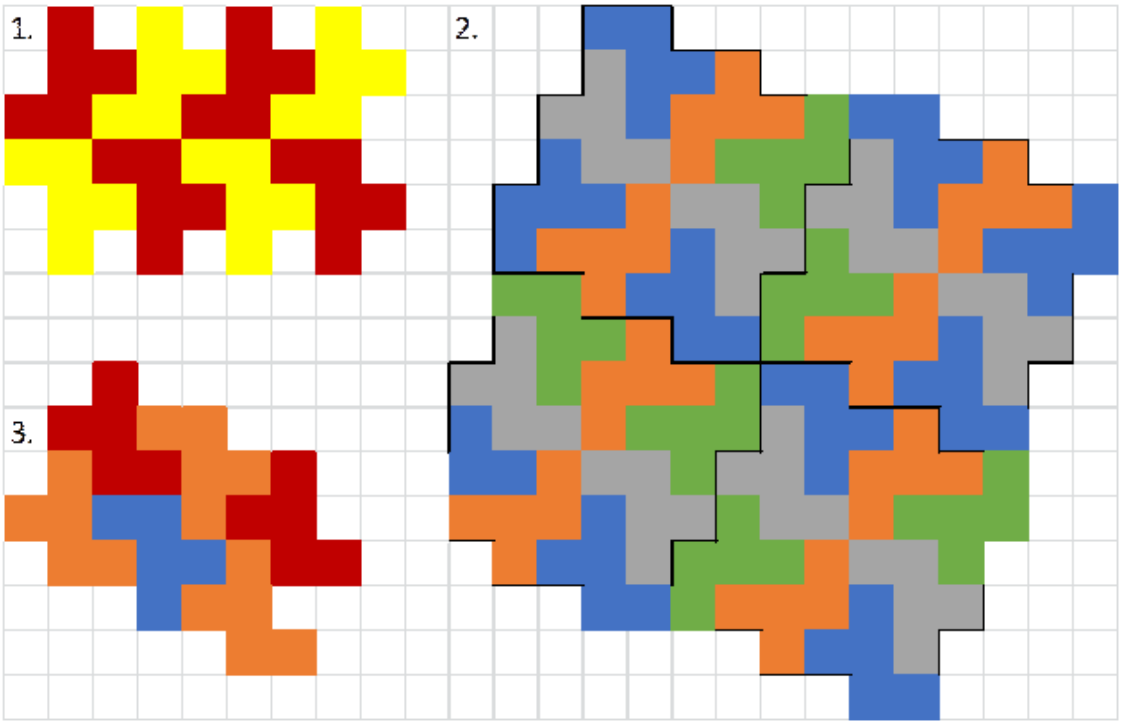


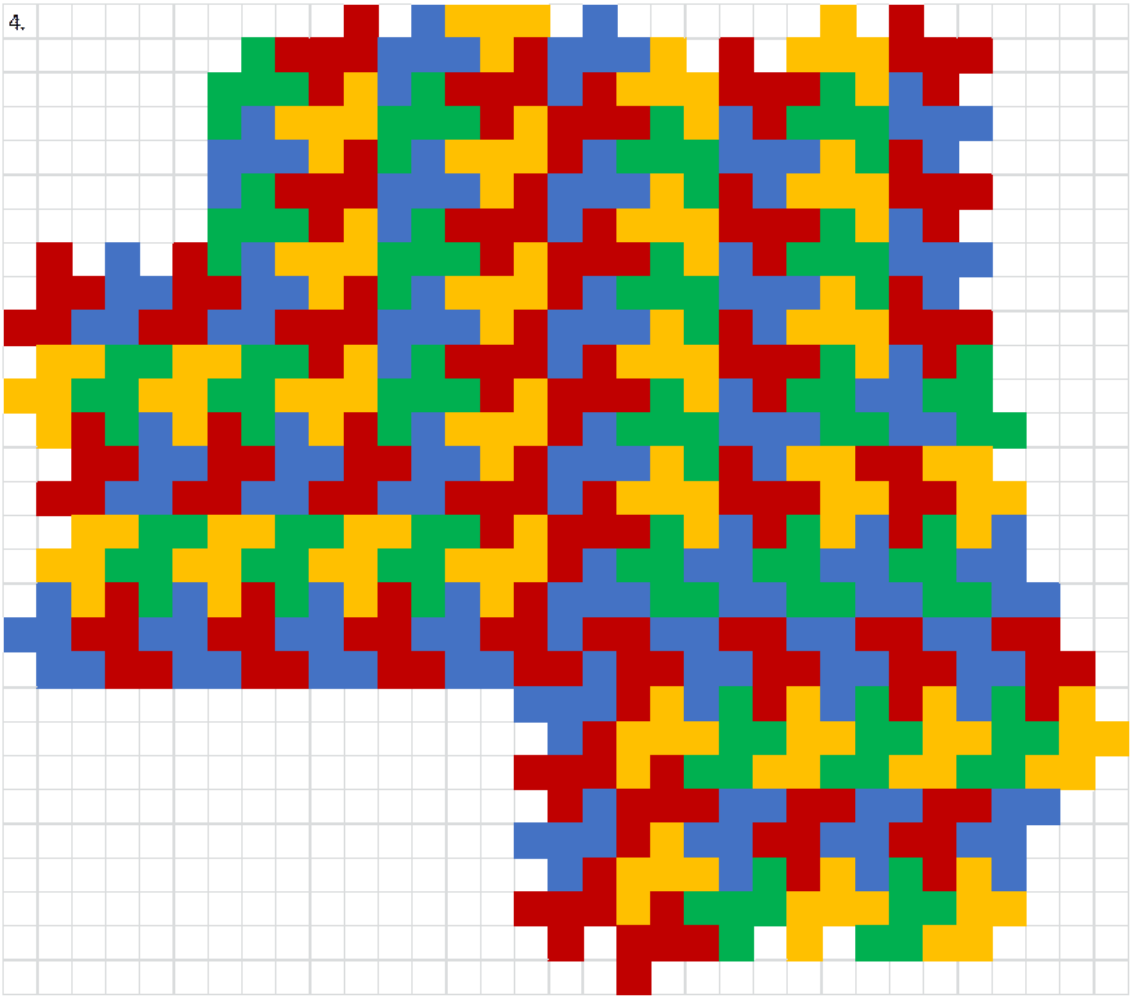
Команда №3 нашла один довольно необычный способ замощения плоскости. При нем одна половина плоскости замощается плитками первого типа, а вторая – второго:

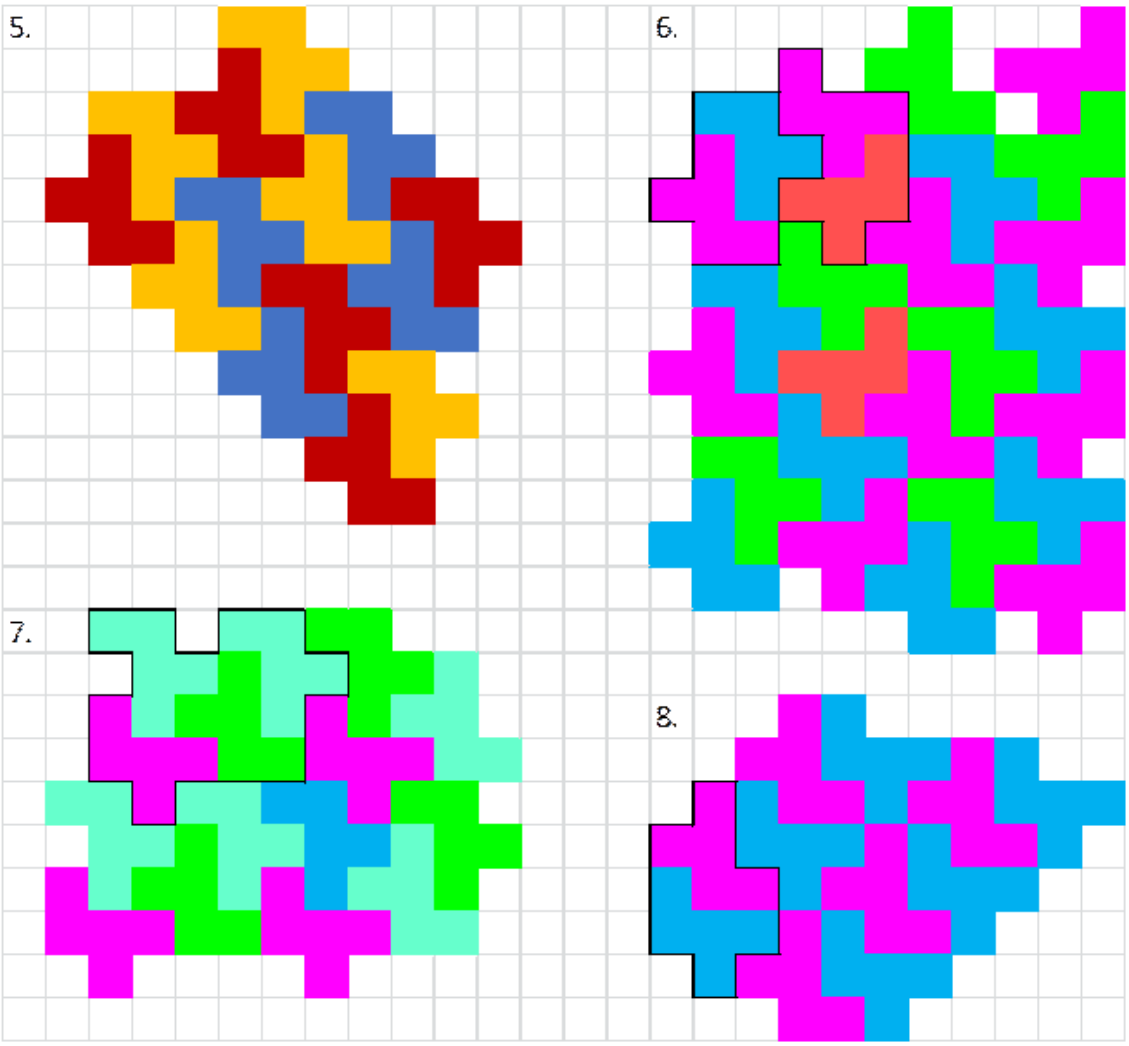


Команда №4 заметила, что существует всего 8 различных типов укладок данной фигуры (с учетов ее поворотов и отражений), и что замощения различны, если в них входят разное число типов или неэквивалентные типы кладки. Кроме того, данная команда сделала попытку доказать, что существует лишь единственное замощение плоскости полосками.

Наконец, самый большой список замощений плоскости представлен командой №5.






5.
6.
7.
8.

Сразу несколько команд (а именно, команды №1, №5 и №6) пришло к выводу, что число N(K) не может быть больше чем 2^{K-1}.

Команда №1: $N(K) \leq 2^{K-1}$, так как для любого K мы можем придумать систему разновесов, состоящую из степеней двойки: если нас просят найти 3 числа, то у нас будет система разновесов 1, 2, 4; если нас просят найти 5 чисел, то у нас будет 1, 2, 4, 8, 16 и т.д.

Это будет работать, так как все суммы, не включающие максимальное из чисел, будут меньше максимального числа, из-за чего пар с одной суммой не будет.

Команды №4 и №6 нашли оптимальные системы разновесов для всех K=4, но наилучшего результата добилась команда №2, которая с помощью компьютерного перебора нашла первые значения для N(K) и привела следующие системы разновесов, достигающие его:

K	2	3	4	5	6	7	8
N(K)	2	4	7	13	24	44	?
Набор	1 2	1 2 4	3 5 6 7	3 6 11 12 13	11 17 20 22 23 24	20 31 37 40 42 43 44	??

Во время представления командами результатов этой задачи на заключительной конференции у жюри возникла следующая идея построения систем разновесов из K чисел.

Пусть $A_2 = \{1,2\}$ *– система разновесов из двух элементов с максимальным входящим в нее числом равным N(2)=2. Рассмотрим следующую последовательность:*

$$s_0 = 0;\ s_1 = 0;\ s_2 = 1;\ s_3 = 2;\ s_i = s_{i-1} + s_{i-2} + s_{i-3}.$$

Если уже есть набор из k – 1 чисел $A_{k-1} = \{a_1^{k-1}, \dots, a_{k-1}^{k-1}\}$, *то на его основе построим набор* $A_k = \{a_1^k, a_2^k, \dots, a_k^k\} = \{s_k, s_k + a_1^{k-1}, \dots, s_k + a_{k-1}^{k-1}\}$.

***Гипотеза**: построенные таким образом множества* A_k *являются системой разновесов, причем максимальное входящее в них число равно N(k).*

Практически все заметили, что количество операций, необходимых для получения числа N, можно оценить с помощью разложения его по степеням двойки.

Команда №2: Представим число в двоичной системе счисления для удобства анализа. Тогда можно сделать верхнюю оценку числа сложений, которая равна наибольшей степени двойки в разложении числа + число единиц в разложении – 1.

Также команда №2 проанализировала некоторые случаи, в которых данные оценка является точной.

Команда №2: Пусть максимальная степень двойки в разложении числа N равна n.

1. Если N есть N -ая степень двойки, то оно получится за n шагов.

2. Если в разложении N по степеням двойки есть всего 2 единицы, то достаточно сделать n+1 шаг.

2. Если в разложении N по степеням двойки содержится 3 единицы, причем среди последних двух символов есть хотя бы одна единица, то достаточно сделать n+2 шага.

Команда №4 дополнительно предложила другие алгоритмы вычисления N и сравнила их с помощью компьютерных экспериментов.

Команда №4: *Алгоритм «Идти с конца»*:

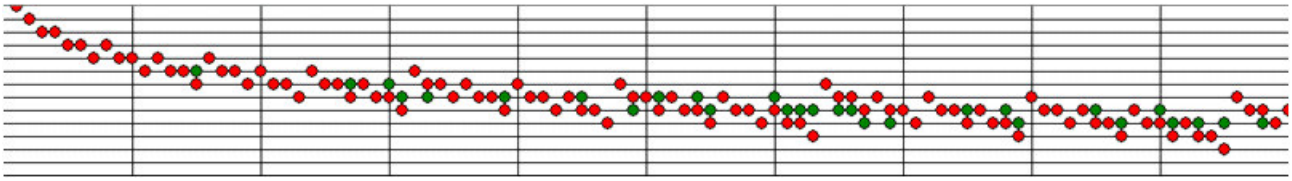
1. Если N чётное, то делим на 2.

2. Если N нечётное, то отнимаем 1.

В вычислительных экспериментах этот алгоритм давал то же число шагов, что и алгоритм, основанный на разложении по степеням двойки.

Алгоритм, основанный на наибольшем делителе: находим наибольший делитель числа N, применяем к нему этот же алгоритм, затем из наибольшего делителя получаем само число.

При помощи нового алгоритма мы смогли получить почти все числа быстрее, чем старым алгоритмом (использующим степени двойки). На рисунке вверху зелёным показан новый алгоритм, а красным старый. Если они совпадают, то точка красная.



Команда №5 использовала идею разложения числа на множители для решения этой задачи еще более эффективно.

Команда №5: Пусть fT(x) – функция для вычисления минимального количества шагов, в результате которых получается число x (функция Тьюринга).

Я нашел алгоритм вычисления fT(x) и представил его в виде программы. Получилась рекурсивная функция, работающая на основе условия: простое или составное число x.

Если x – простое, то делим на 2, если делится, и вычитаем 1, если не делится, до тех пор пока не придем к единице или к составному числу. Если x – составное, то представляем его в виде произведения наименьшего делителя, не равного одному, и второго делителя. Тогда fT(mn) = fT(m) + fT(n).

Наконец, одна из команд решила изменить задачу так, чтобы микрокалькулятор умел только умножать, а не складывать числа.

Команда №2: Можно рассмотреть машинку Тьюринга, которая может умножать числа вместо того, чтобы их складывать. Тогда, для того чтобы получить любое число, в машинке должны быть записаны все простые числа. Ведь любое число можно представит в виде произведения простых множителей. Тогда количество ходов равно количеству знаков умножения, то есть количеству простых множителей -1.

Альманах «Лабиринт» разработан в рамках проекта «Математический РИНРУТ» как технология выявления и развития одаренных детей и молодых людей через внедрение инновационных образовательных подходов и практик с использованием гранта Президента Российской Федерации на развитие гражданского общества, предоставленного Фондом президентских грантов (заявка «17-2-002896»).

Проект реализует АНО «ДИО-ГЕН» в сотрудничестве с СУНЦ НГУ.

Научное и экспертное сопровождение проекта осуществляет ФГБУ науки Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук и Новосибирский государственный университет.

Над номером работали:

к.ф.-м.н. С.В. Августинович, Л.А. Дмитриева, к.ф.-м.н. А.А. Тараненко, А.А. Фёдорова

Новосибирск, 2018 год

Команды

Команда № 1

Руководитель: **Бутаев Рауль Сергеевич**

Фокин Данил
Гетманов Егор
Пискун Максим
Голков Александр
Храмов Александр
Ерценкин Михаил

Команда № 2

Руководитель: **Киреева Татьяна Евгеньевна**

Борозенец Владимир
Гемуев Александр
Присекин Сергей Сергеевич
Бурдэ Сергей
Шварцкоп Михаил

Команда № 3

Руководитель: **Потешкин Виталий Сергеевич**

Бурмистрова Александра
Бутакова Екатерина
Иванькина Алиса
Ильиных Иван
Хребтов Максим
Фоминых Фёдор

Команда № 4

Руководитель: **Щербина Полина Алексеевна**

Тайманова Ольга
Дейс Екатерина
Максимов Арсений
Байгулов Данила
Чуйков Андрей

Команда № 5

Руководитель: **Позднышева Наталья Андреевна**

Вронский Александр
Мишура Роман
Кадочникова Злата
Королёва Дарья
Черкашин Данил
Щербина Екатерина

Команда № 6

Руководитель: **Губаренко Антонина Андреевна**

Байгулов Илья
Лебединский Михаил
Соболев Олег
Гаськов Мирон
Пентюк Андрей

Команда № 7

Руководитель: **Августинович Сергей Владимирович**

Кузнецов Терентий
Шрайнер Данил
Валинуров Марат
Панов Никита
Громов Федор

Команда № 8

Руководитель: **Зайцева Анастасия Фёдоровна**

Криворучко Дарья
Шерстюгина Татьяна
Макогон Артём
Савин Семён
Скоробогатов Саша

Команда № 9

Руководитель: **Крупин Сергей Владимирович**

Косточка Михаил
Санников Григорий
Фирсов Виктор
Иванова Софья
Коновалова Иоанна

Команда № 10

Мишура Петр
Бакшеев Иван
Щавелев Владимир
Гребенников Александр

Команда № 11

Руководитель: **Тарасов Антон Альберчтович**

Кротов Александр
Степанов Иван
Оглоблин Иван
Шелковникова Ксения
Погосов Арсений